DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.2

Indução e Recursão

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

Indução e recursão: Introdução

- Muitas afirmações matemáticas estabelecem que uma certa propriedade é satisfeita por todo inteiro positivo n:

  1. $n! \leq n^n$
  2. $n^3 - n$ é divisível por 3.
  3. se um conjunto tem n elementos, seu conjunto potência tem 2^n elementos.

  Aqui vamos ver uma técnica poderosa para demonstrar este tipo de resultado: a <u>indução matemática</u>.

- Em unidades anteriores também vimos como definir objetos, como conjuntos e funções, usando enumeração de elementos ou fórmulas explícitas.

  Aqui vamos ver uma nova forma de definir objetos, via <u>recursão</u>, que é a definição de um objeto em função de si mesmo.

- Indução e recursão são técnicas essenciais da Matemática Discreta e têm inúmeras aplicações em Ciência da Computação.

Indução Matemática (Fraca)

Princípio da indução matemática: Intuição

- Imagine que você esteja diante de uma escada de infinitos degraus, e você se pergunta: *"Será que eu consigo alcançar qualquer degrau dessa escada?"*

- Você sabe que
  1. você consegue alcançar o primeiro degrau, e
  2. se você alcançar um degrau qualquer, você consegue alcançar o próximo degrau.

- Usando as regras acima, você pode deduzir que:
  1. você consegue alcançar o primeiro degrau: pela regra 1;
  2. você consegue alcançar o segundo degrau: pela regra 1, depois regra 2;
  3. você consegue alcançar o terceiro degrau: regra 1, depois regra 2 por duas vezes;
  4. ...
  5. você consegue alcançar o n-ésimo degrau: regra 1, depois regra 2 por $n - 1$ vezes.

- Logo, você pode concluir que pode alcançar todos os degraus da escada!

Princípio da indução matemática (fraca)

- Para mostrar que uma propriedade $P(n)$ vale para todos os inteiros positivos n, uma **demonstração** que utilize o **princípio da indução matemática (fraca)** possui duas partes:

  Demonstração por indução fraca:

  Passo base: Demonstra-se $P(1)$.

  Passo indutivo: Demonstra-se que, para qualquer inteiro positivo k, se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ é verdadeiro.

- A premissa do passo indutivo ($P(k)$ é verdadeiro) é chamada de **hipótese de indução** ou **I.H.**

- O princípio da indução matemática pode ser expresso como uma regra de inferência sobre os números inteiros:

$$\left(\underbrace{P(1)}_{\text{Passo base}} \quad \land \quad \underbrace{\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (P(k) \to P(k+1))}_{\text{Passo indutivo}} \right) \quad \to \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)}_{\text{Conclusão}}$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Se n é um inteiro positivo, então $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição *"a soma dos n primeiros inteiros positivos é* $n(n+1)/2$*"*.

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Passo indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário k. Ou seja, a nossa hipótese de indução é de que, para um inteiro positivo k arbitrário:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ (Continuação)

Sob a hipótese de indução, deve-se mostrar que $P(k+1)$ é válido, ou seja:

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Podemos, então, derivar

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) && \text{(pela I.H.)}\\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2},\end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso tanto o passo base quanto o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$, ou seja, que $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$ para todo inteiro positivo n. $\square$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Desenvolva uma conjectura de uma fórmula equivalente à soma dos n primeiros inteiros ímpares.

  Então, demonstre sua conjectura usando indução matemática.

  Solução.

  Vamos começar testando alguns exemplos com valores de n:

$$\begin{aligned}
n = 1: &\quad 1 \\
n = 2: &\quad 1 + 3 = 4 \\
n = 3: &\quad 1 + 3 + 5 = 9 \\
n = 4: &\quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 \\
n = 5: &\quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \\
\ldots: &\quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 ... = ?
\end{aligned}$$

  Qual padrão podemos tentar inferir a partir dos exemplos acima?

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Assim, chegamos a uma conjectura razoável, que tentaremos demonstrar:

  "A soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é n^2."

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

Assim, chegamos a uma conjectura razoável, que tentaremos demonstrar:

"A soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é n^2."

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição *"A soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é n^2"*.

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque o primeiro inteiro positivo ímpar é 1, o que é igual a 1^2.

Passo indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário k.

Note que o k-ésimo inteiro positivo ímpar é dado por $2k - 1$.

Logo, a hipótese de indução é:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

Queremos mostrar que $\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (P(k) \to P(k+1))$, onde $P(k+1)$ é:

$$1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2.$$

Logo, podemos derivar

$$\begin{aligned}
1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) &= k^2 + (2(k+1) - 1) \quad \text{(pela I.H.)} \\
&= k^2 + 2k + 1 \\
&= (k+1)^2,
\end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso o passo base e o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$, ou seja, que a soma dos n primeiros ímpares positivos é n^2. $\square$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Para todo inteiro não-negativo n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Para todo inteiro não-negativo n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição "$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$".

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque:

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^{0+1} - 1,$$

já que o lado esquerdo da igualdade acima pode ser escrito como

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1,$$

e o lado direito pode ser escrito como

$$2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ (Continuação)

Passo indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k, ou seja, suponha como verdadeira a hipótese de indução

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1.$$

Queremos mostrar que, se a hipótese acima for verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira, ou seja, que

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ (Continuação)

Para isto, podemos derivar

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} 2^i &= \left(\sum_{i=0}^{k} 2^i\right) + 2^{k+1} \\
&= \left(2^{k+1} - 1\right) + 2^{k+1} && \text{(pela I.H.)} \\
&= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1,
\end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ para todo inteiro $n \geq 0$. $\square$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Para todo inteiro $n \geq 4$, $2^n < n!$.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição "$2^n < n!$".

Passo base: $P(4)$ é verdadeiro porque $2^4 = 16$ é menor que $4! = 24$.

Passo indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário $k \geq 4$, ou seja, a hipótese de indução é que, para um inteiro arbitrário $k \geq 4$,

$$2^k < k!.$$

Sob esta hipótese, queremos mostrar $P(k+1)$, ou seja,

$$2^{k+1} < (k+1)!$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ (Continuação)

  Para isto, podemos derivar

$$\begin{aligned}
2^{k+1} &= 2(2^k) & \\
&< 2(k!) & \text{(pela I.H.)} \\
&< (k+1)k! & \text{(já que } k \geq 4\text{)} \\
&= (k+1)!, &
\end{aligned}$$

  de onde concluímos o passo indutivo.

  Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 4 : P(n)$, ou seja, que $2^n < n!$ para todo inteiro $n \geq 4$. $\square$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Para todo inteiro $n \geq 0$, $n^3 - n$ é divisível por 3.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição *"$n^3 - n$ é divisível por 3"*.

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque $0^3 - 0 = 0$ é divisível por 3.

Passo indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k, ou seja, que é verdadeira a hipótese de indução de que $k^3 - k$ é divisível por 3.

Queremos mostrar que $P(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja, que $(k+1)^3 - (k+1)$ é divisível por 3.

Para isto, podemos fazer:

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k).\end{aligned}$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ (Continuação)

  Então sabemos que

  $$(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 - k) + 3(k^2 + k).$$

  Note que no lado direito da igualdade acima, a primeira parcela da soma é $(k^3 - k)$ e, pela I.H., este valor é divisível por 3.

  Além disso, a segunda parcela $3(k^2 + k)$ da soma do lado direito também é divisível por 3.

  Logo todo o lado direito da igualdade é divisível por 3, e assim concluímos indutivo ao mostrar que $(k+1)^3 - (k+1)$ é divisível por 3.

  Assim mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que $n^3 - n$ é divisível por 3 para todo inteiro $n \geq 0$. $\square$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Para todo inteiro não-negativo n, se um conjunto possui n elementos, então este conjunto possui 2^n subconjuntos.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Para todo inteiro não-negativo n, se um conjunto possui n elementos, então este conjunto possui 2^n subconjuntos.

  Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição *"todo conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos"*.

  Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque o único conjunto de 0 elementos é o conjunto vazio $\emptyset$, que possui somente $2^0 = 1$ subconjunto (ele mesmo).

  Passo indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k, ou seja, a hipótese de indução é:

  "Todo conjunto de k elementos possui 2^k subconjuntos."

  Sob a I.H., queremos demonstrar $P(k+1)$, ou seja, que

  "Todo conjunto de $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos."

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ (Continuação)

  Para mostrar isto, seja T um conjunto qualquer de $k+1$ elementos. Então é possível escrever T como $S \cup \{a\}$, onde

  - a é um elemento qualquer de T;
  - $S = T - \{a\}$ e, portanto, $|S| = k$.

  Note que os subconjuntos de T podem ser obtidos da seguinte forma.

  Para cada subconjunto X de S, existem exatamente dois suconjuntos de T: o subconjunto X (em que a não aparece) e o subconjunto $X \cup \{a\}$ (em que a aparece). Logo o número de subconjuntos de T é o dobro do número de subconjuntos de S. Pela hipótese indutiva, S tem 2^k subconjuntos, logo T possui $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ subconjuntos. Isto conclui o passo indutivo.

  Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que todo conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos. $\square$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Uma das Leis de De Morgan afirma que, para dois conjuntos A_1 e A_2, temos

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$$

Sabendo disto, demonstre a seguinte generalização da Lei de De Morgan:

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}\ ,$$

sempre que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$.

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ (Continuação)

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição *"$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$ sempre que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$".*

Passo base: $P(2)$ é verdadeiro porque, como já demonstramos nesse curso, a Lei de De Morgan original garante que $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ (Continuação)

Passo indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário $k \geq 2$, ou seja, a hipótese de indução é

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j},$$

sempre que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$.

Queremos mostrar que, sob a I.H., $P(k+1)$ também é verdadeira, ou seja, que

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j},$$

sempre que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ (Continuação)

Para isto, note que

$$\begin{aligned}
\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} &= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \cap A_{k+1}} \\
&= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right)} \cup \overline{A_{k+1}} && \text{(usando a Lei de De Morgan sobre os conjuntos } \textstyle\bigcap_{j=1}^{k} A_j \text{ e } A_{k+1}\text{)} \\
&= \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}\right) \cup \overline{A_{k+1}} && \text{(pela I.H.)} \\
&= \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j},
\end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2 : P(n)$, ou seja, que a generalização da Lei de De Morgan é válida. $\square$

Quando usar indução matemática

- O princípio da indução <u>pode</u> ser utilizado para <u>demonstrar propriedades</u> dos números inteiros (se elas forem verdadeiras).
- O princípio da indução <u>não pode</u> ser utilizado para <u>descobrir propriedades</u> dos números inteiros.
  - A propriedade geralmente é descoberta usando um outro método, talvez até tentativa e erro, e uma vez que uma propriedade é conjecturada, a indução pode ser usada para demonstrá-la (caso a propriedade seja mesmo verdadeira).

Modelo de demonstração por indução matemática (fraca)

1. Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma *"para todo inteiro $n \geq b$, $P(n)$"*, onde b é um inteiro fixo.
2. Escreva "Passo base." e mostre que $P(b)$ é verdadeiro, se certificando de que o valor correto de b foi utilizado. Isto conclui o passo base.
3. Escreva as palavras "Passo indutivo."
4. Escreva claramente a hipótese indutiva, na forma "Suponha que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro arbitrário fixo $k \geq b$."
5. Escreva o que precisa ser demonstrado sob a suposição de que a hipótese de indução é verdadeira. Ou seja, escreva o que $P(k+1)$ significa.
6. Demonstre a afirmação $P(k+1)$ utilizando o fato de que $P(k)$ é verdadeiro. Certifique-se de que sua demonstração é válida para qualquer $k \geq b$.
7. Identifique claramente as conclusões do passo indutivo, e conclua-o escrevendo, por exemplo, "isto completa o passo de indução".
8. Completados o passo base e o passo indutivo, escreva a conclusão da demonstração: que, por indução matemática, $P(n)$ é verdadeiro para todos os inteiros $n \geq b$.

Princípio da indução matemática (fraca): Erros comuns

- Como em qualquer outra técnica de demonstração, o princípio da indução matemática deve ser usado com cautela para evitar erros.

- Em particular, para que a demonstração por indução esteja correta é preciso demonstrar ambos o passo base e o passo indutivo.

  Se um dos dois passos não for demonstrado, o resultado não está garantido!

- Exemplo 8 Imagine que tenhamos a conjectura de que o predicado $P(n)$ definido como *"10^n é múltiplo de 7"* é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Se quisermos demonstrar esta afirmação por indução:

  a) É possível demonstrar o passo indutivo?

  b) É possível demonstrar o passo base?

  c) A demonstração por indução pode ser concluída com sucesso?

Princípio da indução matemática (fraca): Erros comuns

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ (Continuação)

Solução.

a) Vamos começar pelo passo indutivo.

Passo indutivo: Suponha como hipótese indutiva que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro $k \geq 0$ arbitrário, ou seja, que 10^k é divisível por 7. Sob a I.H., queremos mostrar que $P(k+1)$ também deve ser verdadeiro, ou seja, que 10^{k+1} é divisível por 7.

Se 10^k é divisível por 7, então existe um inteiro r tal que que $10^k = 7r$.

Logo podemos derivar

$$\begin{aligned} 10^{k+1} &= 10 \cdot 10^k \\ &= 10 \cdot 7r && \text{(pela I.H.)} \\ &= 7(10r) \end{aligned}$$

e, portanto, 10^{k+1} é divisível por 7, o que conclui o passo indutivo com sucesso.

Princípio da indução matemática (fraca): Erros comuns

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ (Continuação)

  b) Agora olharemos o passo base.

  Passo base: Queremos mostrar $P(0)$, ou seja, que $10^0 = 1$ é divisível por 7. Mas isso é claramente falso.

  Logo o passo base não é válido.

  c) Por fim concluímos que a demonstração por indução não foi completada com sucesso, pois, apesar de o passo indutivo ter sido demonstrado, o passo base não foi.

  (Na verdade, o predicado $P(n)$ é falso para todo $n \in \mathbb{N}$!)

Indução Matemática (Forte) e Boa Ordenação

Princípio da indução matemática (forte): Introdução

- O princípio de indução que vimos até agora é conhecido como o **princípio da indução matemática fraca**:

$$\left(\underbrace{P(1)}_{\text{Passo base}} \quad \land \quad \underbrace{\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (\overbrace{P(k)}^{\text{I.H.}} \rightarrow P(k+1))}_{\text{Passo indutivo}} \right) \quad \rightarrow \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)}_{\text{Conclusão}}$$

  Ele recebe este nome de indução "fraca" porque a hipótese de indução (I.H.) do passo indutivo é apenas que $P(k)$ seja verdadeiro para algum k.

- Às vezes é complicado usar a indução fraca para demonstrar um teorema, e podemos recorrer ao **princípio da indução matemática forte**.
  - Neste princípio, a hipótese de indução do passo indutivo é de que $P(j)$ é válido para todo $1 \leq j \leq k$.

Princípio da indução matemática (forte)

- Para mostrar que uma propriedade $P(n)$ vale para todos os inteiros positivos n, uma **demonstração** que utilize **princípio da indução matemática (forte)** possui duas partes:

  Demonstração por indução forte:

  Passo base: Demonstra-se $P(1)$;

  Passo indutivo: Demonstra-se que, para qualquer inteiro positivo k, se $P(j)$ é verdadeiro para todo $1 \leq j \leq k$, então $P(k+1)$ é verdadeiro.

- A **hipótese de indução** ou **I.H.** da indução forte é $P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)$ são todos verdadeiros.

- O princípio da indução matemática forte pode ser expresso como uma regra de inferência sobre os números inteiros:

$$\left(\underbrace{P(1)}_{\text{Passo base}} \wedge \underbrace{\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1))}_{\text{Passo indutivo}} \right) \rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)}_{\text{Conclusão}}$$

Princípio da indução matemática forte: Intuição

- Imagine que você esteja diante de uma escada de infinitos degraus, e você novamente se pergunta: *"Será que eu consigo alcançar qualquer degrau dessa escada?"*
- Mas, desta vez, você sabe que:
  1. você consegue alcançar o primeiro degrau e também o segundo degrau, e
  2. se você alcançar um degrau qualquer, você consegue alcançar dois degraus acima (ou seja, você pode subir degraus de dois em dois).
- Você consegue usar a indução fraca para verificar que conseguimos alcançar qualquer degrau dessa escada?

Princípio da indução matemática forte: Intuição

- Vamos tentar responder à pergunta usando indução forte.

  Vamos chamar de $P(n)$ a proposição *"Eu consigo alcançar o n-ésimo degrau da escada"*.

  Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque eu consigo alcançar o primeiro degrau. O mesmo vale para $P(2)$.

  Passo indutivo: Suponhamos como hipótese de indução que para um $k \geq 2$, as proposições $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ são todas verdadeiras. Queremos mostrar que $P(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja, que podemos alcançar também o $(k+1)$-ésimo degrau.

  Para ver que podemos alcançar o degrau $k+1$, note que pela I.H. alcançamos todos os degraus entre 1 e k (para $k \geq 2$), e, em particular, o degrau $k-1$. Como alcançamos $k-1$ e a regra 2 diz que uma vez que tenhamos alcançado um degrau podemos alcançar dois degraus acima, podemos alcançar o degrau $k+1$. E assim termina o passo indutivo.

  Dessa forma, a demonstração por indução forte está completa.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Se n é um inteiro maior que 1, então n pode ser escrito como o produto de números primos.

  Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição *"n pode ser escrito como o produto de números primos"*.

  Passo base: $P(2)$ é verdadeiro porque 2 pode ser escrito como o produto de um número primo, ele mesmo.

  Passo indutivo: A hipótese de indução é que $P(j)$ é verdadeiro para todos os inteiros positivos tais que $2 \leq j \leq k$, ou seja, que qualquer inteiro j entre 2 e k pode ser escrito como o produto de primos.

  Para completar o passo indutivo, temos que mostrar que a I.H. de indução implica que $P(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja, que o inteiro $k+1$ também pode ser escrito como o produto de primos.

Exemplos de uso de indução matemática

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$ (Continuação)

Há dois casos a se considerarem: $k+1$ é primo ou $k+1$ é composto.

- Caso 1: $k+1$ é primo. Neste caso $P(k+1)$ é trivialmente verdadeiro, porque $k+1$ é o produto de um único primo, ele mesmo.
- Caso 2: $k+1$ é composto. Neste caso $k+1$ pode ser escrito como o produto de dois inteiros a e b tais que $2 \leq a \leq b \leq k$. Pela hipótese de indução, tanto a quanto b podem ser escritos como o produto de primos (já que $P(j)$ vale para todo $2 \leq j \leq k$). Logo, $k+1 = ab$ também pode ser escrito como o produto de primos e assim concluímos o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso o passo base e o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2 : P(n)$, ou seja, que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito como o produto de números primos. $\square$

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ Toda postagem de 12 centavos ou mais pode ser feita usando apenas selos de 4 centavos e selos de 5 centavos.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ Toda postagem de 12 centavos ou mais pode ser feita usando apenas selos de 4 centavos e selos de 5 centavos.

  Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição *"qualquer postagem de n centavos pode ser feita usando apenas selos de* 4 *centavos e selos de* 5 *centavos"*.

  Passo base: Vamos precisar de quatro casos base:

  - $P(12)$ é verdadeiro porque podemos usar três selos de 4 centavos;
  - $P(13)$ é verdadeiro porque podemos usar dois selos de 4 centavos e um selo de 5 centavos;
  - $P(14)$ é verdadeiro porque podemos usar um selos de 4 centavos e dois selos de 5 centavos; e
  - $P(15)$ é verdadeiro porque podemos usar 3 selos de 5 centavos;

  Isto completa o passo base.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ (Continuação)

Passo indutivo: A hipótese de indução é que $P(j)$ é verdadeiro para $12 \leq j \leq k$, onde k é um inteiro $k \geq 15$. Ou seja, a I.H. é que toda postagem de valores entre 12 centavos e k centavos pode ser feita usando selos de 4 e 5 centavos apenas.

Para completar o passo indutivo, vamos mostrar que, sob a I.H., $P(k+1)$ é verdadeiro, ou seja, que uma postagem de $k+1$ centavos pode ser feita usando-se apenas selos de 4 e 5 centavos.

Pela I.H., $P(k-3)$ é verdadeiro porque $k-3 \geq 12$ e para todo $12 \leq j \leq k$ temos $P(j)$ verdadeiro. Logo, existe uma maneira de postar $k-3$ centavos usando apenas selos de 4 e 5 centavos. Para postar $k+1$ centavos, basta acrescentar à postagem possível para $k-3$ centavos um selo de 4 centavos.

Isto conclui o passo indutivo e a demonstração. $\square$

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$ O Jogo de Nim possui as seguintes regras:

  1. Há duas pilhas de fósforos (não vazias) sobre a mesa.
  2. Dois jogadores se alternam em rodadas, sendo que em cada rodada um jogador escolhe uma pilha de fósforos e retira da mesma um número positivo de fósforos.
  3. O jogador que remover o último fósforo ganha o jogo.

  Mostre que se as duas pilhas de fósforos contêm inicialmente o mesmo número de fósforos, então o segundo jogador sempre pode ganhar o Jogo de Nim.

  Demonstração. Seja n o número de fósforos em cada pilha. Seja $P(n)$ a proposição *"o segundo jogador pode ganhar o Jogo de Nim se houver inicialmente n fósforos em cada pilha"*.

  Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque nesse caso o primeiro jogador só tem uma opção: remover um fósforo de uma das pilhas, e assim o segundo jogador ganha ao remover o fósforo da outra pilha.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$ (Continuação)

Passo indutivo: A hipótese de indução é a afirmação de que $P(j)$ é verdadeiro para todo $1 \leq j \leq k$, ou seja, que o segundo jogador sempre pode vencer o Jogo de Nim em que cada pilha começa com j fósforos, sendo j um inteiro entre 1 e k.

Supondo a I.H., precisamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeiro, ou seja, que o segundo jogador pode vencer o Jogo de Nim se cada pilha começar com $k+1$ fósforos.

Para mostrar isto, suponha que cada pilha comece com $k+1$ fósforos. Pelas regras do jogo, o primeiro jogador tem que remover um número r fósforos tal que $1 \leq r \leq k+1$. Comece por notar que se o primeiro jogador remover exatamente $k+1$ fósforos de uma pilha, o segundo jogador ganha ao remover $k+1$ fósforos da outra pilha.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$ (Continuação)

  Vamos nos concentrar agora no caso de o primeiro jogador remover $1 \leq r \leq k$ fósforos de uma pilha.

  Nesse caso, o segundo jogador pode remover o mesmo número r de fósforos da outra pilha.

  Nesse caso, cada pilha passa a conter um número igual de fósforos $k + 1 - r$.

  Como $1 \leq k + 1 - r \leq k$, a hipótese de indução garante que o segundo jogador pode ganhar o Jogo de Nim uma vez que cada pilha tenha $k + 1 - r$ fósforos.

  Logo a indução forte termina. $\square$

Princípio da Boa Ordenação

- O princípio da indução matemática fraca e forte são equivalentes:

  1. Toda demonstração que pode ser feita com indução fraca, pode ser feita também com indução forte.
     - Desafio para o(a) estudante: como demonstrar isto?
  2. Toda demonstração que pode ser feita com indução forte, pode ser feita também com indução fraca.
     - Desafio para o(a) estudante: como demonstrar isto?

- Além disso, o princípio da indução matemática fraca e forte são equivalentes ao seguinte axioma dos números naturais:

  Princípio da Boa Ordenação: Seja S um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Então S tem um menor elemento.