DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.2

Lógica de Predicados

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

Lógica de predicados: Introdução

- A lógica proposicional cobre a análise de proposições compostas (fórmulas), i.e., proposições simples ligadas por conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ...
- Entretanto, a lógica proposicional não é expressiva o suficiente para capturar certas afirmações.
- Por exemplo, suponha que saibamos que

  1. *"Todos os matriculados em Introdução à Lógica Computacional são estudantes dedicados"*, e que
  2. *"Túrin está matriculado em Introdução à Lógica Computacional"*.

  Intuitivamente, podemos, então, concluir que

  3. *"Túrin é um estudante dedicado."*

  Para este tipo de inferência precisaremos introduzir os conceitos de predicados e quantificadores.

Lógica de predicados: Introdução

- A lógica proposicional cobre a análise de proposições compostas (fórmulas), i.e., proposições simples ligadas por conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ...

- Entretanto, a lógica proposicional não é expressiva o suficiente para capturar certas afirmações.

- Por exemplo, suponha que saibamos que

  1. *"Todos os matriculados em Introdução à Lógica Computacional são estudantes dedicados"*, e que
  2. *"Túrin está matriculado em Introdução à Lógica Computacional"*.

  Intuitivamente, podemos, então, concluir que

  3. *"Túrin é um estudante dedicado."*

  Para este tipo de inferência precisaremos introduzir os conceitos de predicados e quantificadores.

  - Note que quando "todos" se refere a uma quantidade finita, nós poderíamos expressar as afirmações acima em Lógica Proposicional.

Predicados

Predicados: Introdução

- Afirmações como as seguintes são comuns em matemática:
  1. $x \geq 12 \wedge x < 64$,
  2. $x + y = z$,
  3. O aluno x tirou a maior nota da sala na prova.
- Tais afirmações são escritas em termos de <u>variáveis</u>.
- Como em lógica proposicional, para atribuir um valor de verdade a essas afirmações, precisamos valorar as variáveis.
- Mas também precisamos raciocinar além de proposições e conectivos lógicos.
  - Por exemplo, para uma certa valoração $\mathcal{V}$ de x que lhe associa a um aluno, qual o valor de $[\![\text{“O aluno x tirou a maior nota da sala na prova”}]\!]^{\mathcal{V}}$?

Predicados: Introdução

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ A afirmação

  "x é um número real"

  pode ser dividida em duas partes:

  1. a primeira parte, a **variável** x, é o sujeito da afirmação,
  2. a segunda parte "é um número real" é um **predicado**, ou seja, uma propriedade que o sujeito da afirmação pode ou não satisfazer.

  A afirmação *"x é um número real"* pode ter valores de verdade diferentes dependendo do valor que a variável x assumir.

  - Quando $x = \pi$, a afirmação *"x é um número real"* é verdadeira.
  - Quando $x = \sqrt{-2}$, a afirmação *"x é um número real"* é falsa.

Predicados: Introdução

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ (Continuação)

  Podemos ver esta afirmação como uma **função proposicional**

  $$P(x): \text{ ``}\textit{x é um número real}\text{''}$$

  que mapeia valores de x para valores de verdade (verdadeiro ou falso):

  - $P(\pi) = T$.
  - $P(\sqrt{-2}) = F$.

Predicados

- Um **predicado** é uma afirmação com um número finito de variáveis cujo valor de verdade pode ser determinado quando as variáveis são substituídas por valores específicos.

  Intuitivamente, predicados:

  - dão qualidades a sujeitos,
  - relacionam sujeitos entre si, ou
  - relacionam sujeitos a objetos.

- A aridade de predicados depende do número argumentos que ele toma.

  Um predicado

  $$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  de n argumentos é chamado de um **predicado n-ário**.

Predicados

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Seja $P(x)$ o predicado unário "$x \geq 10$".
  - $P(15) = T$,

    pois substituindo x por 15 em "$x \geq 10$", obtemos uma afirmação verdadeira.
  - $P(\pi) = F$,

    pois substituindo x por π em "$x \geq 10$", obtemos uma afirmação falsa.

Predicados

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Seja $P(x)$ o predicado unário *"$x \geq 10$"*.
  - $P(15) = T$,

    pois substituindo x por 15 em *"$x \geq 10$"*, obtemos uma afirmação verdadeira.

  - $P(\pi) = F$,

    pois substituindo x por π em *"$x \geq 10$"*, obtemos uma afirmação falsa.

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Seja $C(x, y)$ o predicado binário *"x é capital de y"*.
  - $C(\texttt{Brasília}, \texttt{Brasil}) = T$,

    pois substituindo x por `Brasília` e y por `Brasil` em *"x é capital de y"*, obtemos uma afirmação verdadeira.

  - $C(\texttt{Paris}, \texttt{Inglaterra}) = F$,

    pois substituindo x por `Paris` e y por `Inglaterra` em *"x é capital de y"*, obtemos uma afirmação falsa.

Predicados

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Seja $S(x, y, z)$ o predicado ternário "$x + y = z$".
  - $S(1, 4, 5) = T$,

    pois substituindo x por 1, y por 4 e z por 5 em "$x + y = z$", obtemos uma afirmação verdadeira.
  - $S(4, 5, 1) = F$,

    pois substituindo x por 4, y por 5 e z por 1 em "$x + y = z$", obtemos uma afirmação falsa.
  - $S(0, 0, 0) = T$,

    pois substituindo x por 0, y por 0 e z por 0 em "$x + y = z$", obtemos uma afirmação verdadeira.

Quantificadores: Introdução

- Para atribuir um valor de verdade à aplicação de um predicado podemos:

  1. atribuir valores específicos para todas variáveis (como fizemos até agora), ou

  2. *quantificar* em qual faixa de valores de x a afirmação pode ser considerada verdadeira.

     Em português, usamos palavras como "*nenhum*", "*todos*" e "*algum*" para quantificar predicados.

     Por exemplo, a aplicação do predicado

     "O computador x do laboratório está ligado"

     precisa de um valor para x para ter um valor de verdade, mas as seguintes afirmações não:

     1. *"<u>Nenhum</u> computador do laboratório está ligado."*
     2. *"<u>Todos</u> os computadores do laboratório estão ligados."*
     3. *"<u>Algum</u> computador do laboratório está ligado."*

Quantificadores: Domínio ou universo de discurso

- Dado um predicado de várias variáveis, o **domínio de discurso**, ou **universo de discurso**, ou simplesmente **domínio** é o conjunto de valores que as variáveis podem, em princípio, assumir.

  1. No predicado

     $$\text{“}x \geq 2\text{”},$$

     o domínio de discurso pode ser o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ ou o dos inteiros $\mathbb{Z}$.

  2. No predicado

     “A pessoa x nasceu no país y”,

     o domínio de x pode ser o conjunto de todas as pessoas, e o domínio de y pode ser o conjunto de países no mundo.

- O domínio de um predicado é essencial para determinarmos a quantificação.

Quantificador universal

- Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação universal** é

  $$\forall x.\, P(x)$$

  significando

  "Para todos os valores x no domínio, $P(x)$ é verdadeiro"

  ou simplesmente

  "Para todo x no domínio, $P(x)$"

- O símbolo $\forall$ é o símbolo de **quantificador universal**.
- A afirmação $\forall x.\, P(x)$ é
  - verdadeira se $P(x)$ é verdadeiro para todo x no domínio,
  - falsa se há algum x no domínio tal que $P(x)$ seja falso.

    Um elemento x tal que $P(x) = F$ é um **contra-exemplo** para $\forall x.\, P(x)$.

Quantificação universal

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Considere o universo de discurso $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A afirmação

$$\forall x.\, x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Quantificação universal

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Considere o universo de discurso $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A afirmação

$$\forall x.\, x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Temos que

$$1^2 \geq 1, \quad 2^2 \geq 2, \quad 3^2 \geq 3, \quad 4^2 \geq 4, \text{ e } \quad 5^2 \geq 5.$$

Portanto temos que $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ e $P(5)$ são todos verdadeiros, e a afirmação universal é, consequentemente, também verdadeira.

Quantificação universal

- É possível definir o universo de discurso já na afirmação quantificada:
    1. $\forall x \in \mathbb{R}.\ x + 1 > x$ estabelece como universo de discurso os números reais.
    2. $\forall y \in \mathbb{Z}^+.\ -y \leq -5$ estabelece como universo de discurso os inteiros positivos.
- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ A afirmação

$$\forall x \in \mathbb{R}.\ x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Quantificação universal

- É possível definir o universo de discurso já na afirmação quantificada:
  1. $\forall x \in \mathbb{R}.\ x + 1 > x$ estabelece como universo de discurso os números reais.
  2. $\forall y \in \mathbb{Z}^{+}.\ -y \leq -5$ estabelece como universo de discurso os inteiros positivos.
- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ A afirmação

$$\forall x \in \mathbb{R}.\ x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Temos o contra-exemplo

$$(1/2)^2 = 1/4 \not\geq 1/2,$$

logo $P(1/2)$ é falso e, consequentemente, a afirmação universal é falsa.

Quantificação existencial

- Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação existencial** é

$$\exists x.\, P(x)$$

significando

"Existe um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro"

ou simplesmente

"Existe x no domínio tal que $P(x)$"

- O símbolo $\exists$ é o símbolo de **quantificador existencial**.
- A afirmação $\exists x.\, P(x)$ é
  - verdadeira se $P(x)$ é verdadeiro para ao menos um x no domínio,
  - falsa se para todo x no domínio $P(x)$ é falso.

  Um elemento x tal que $P(x) = T$ é uma **testemunha** de $\exists x.\, P(x)$.

Quantificação existencial

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Seja $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ o universo de discurso. A afirmação

$$\exists m.\ m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Quantificação existencial

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Seja $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ o universo de discurso. A afirmação

$$\exists m.\ m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Analisando todos os casos, obtemos

$$5^2 = 25 \neq 5, \qquad 6^2 = 36 \neq 6, \qquad 7^2 = 49 \neq 7,$$

$$8^2 = 64 \neq 8, \qquad 9^2 = 81 \neq 9, \text{ e} \qquad 10^2 = 100 \neq 10.$$

Portanto a afirmação existencial é falsa.

Quantificação existencial

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Seja $\mathbb{Z}$ o universo de discurso. A afirmação

$$\exists m.\ m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Quantificação existencial

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Seja $\mathbb{Z}$ o universo de discurso. A afirmação

$$\exists m.\ m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Temos que $1^2 = 1$, logo 1 é uma testemunha de que $m^2 = m$ para pelo menos um inteiro m.

Portanto a afirmação existencial é verdadeira.

- Note que nos dois exemplos anteriores a fórmula é a mesma ($\exists m.\ m^2 = m$), mas com o universo de discurso $m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ela é falsa, enquanto que com o universo de discurso $m \in \mathbb{Z}$ ela é verdadeira.

Quantificação sobre domínios finitos

- Quando o domínio de um quantificador é finito, podemos remover os quantificadores universal ou existencial.
- A afirmação universal em um domínio finito $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ é verdadeira sse $P(x)$ é verdadeiro para todo $x \in D$:

$$\forall x.\, P(x) \qquad \equiv \qquad P(d_1) \wedge P(d_2) \cdots \wedge P(d_n).$$

- A afirmação existencial em um domínio finito $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ é verdadeira sse $P(x)$ é verdadeiro para pelo menos um $x \in D$:

$$\exists x.\, P(x) \qquad \equiv \qquad P(d_1) \vee P(d_2) \cdots \vee P(d_n).$$

Ordem de precedência dos quantificadores

- Comumente, os quantificadores $\forall$ e $\exists$ têm precedência sobre todos os conectivos lógicos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ...).

  Por exemplo:

  1. A afirmação

     $$\forall x.\, P(x) \vee Q(x)$$

     significa

     $$(\,\forall x.\, P(x)\,) \;\vee\; Q(x).$$

     Note que a afirmação <u>não significa</u>

     $$\forall x.\, (\, P(x) \vee Q(x)\,).$$

     Use parênteses com cuidado para expressar o que realmente você quer!

Quantificadores: Variáveis ligadas e escopo

- Quando um quantificador é utilizado em uma variável x, dizemos que x é uma **variável ligada**.

  Uma variável que não é ligada a nenhum quantificador é chamada de **variável livre**.

  1. Em

     $$\forall x.\, x + y = 2,$$

     x é uma variável ligada, e y é uma variável livre.

- Os nomes das variáveis ligadas de uma expressão quantificada podem ser mudados sem alterar o valor da expressão.

  1. A expressão

     $$\exists x.\, x + 1 \neq x \quad \text{equivale a} \quad \exists y.\, y + 1 \neq y \quad \text{e a} \quad \exists num.\, num + 1 \neq num.$$

Quantificadores: Variáveis ligadas e escopo

- Cada quantificador tem um **escopo** sobre o qual ele vale.

1. Em

$$\exists x.\,(\,P(x) \wedge Q(x)\,) \quad \vee \quad \forall x.\,R(x)$$

todas as variáveis são ligadas, mas o escopo de cada x é diferente.

O primeiro quantificador, $\exists x$, tem como escopo apenas

$$(\,P(x) \wedge Q(x)\,).$$

O segundo quantificador, $\forall x$, tem como escopo apenas

$$R(x).$$

Podemos renomear variáveis ligadas em escopos diferentes sem alterar a expressão lógica (o que muitas vezes torna a expressão mais fácil de ser lida):

$$\exists x.\,(\,P(x) \wedge Q(x)\,) \quad \vee \quad \forall y.\,R(y)$$

Semântica

- Em resumo, a diferença para darmos valor de verdade a fórmulas em lógica proposicional e lógica de predicados é:
  - Em lógica proposicional, basta uma valoração $\mathcal{V}$ de variáveis para $\{T, F\}$ e uma maneira de avaliar uma fórmula φ qualquer de acordo com $\mathcal{V}$: $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{V}}$.
  - Em lógica de predicados, precisamos:
    - Definir os domínios $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ para as variáveis
    - Definir uma valoração $\mathcal{V}$ de cada variável livre para seu respectivo domínio $\mathcal{D}_i$
    - Definir uma interpretação $\mathcal{I}$ de cada predicado para seu significado
    - Avaliar uma fórmula ψ qualquer de acordo com $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{I}$. Nós chamamos esta coleção de objetos um *modelo* $\mathcal{M}$, e a avaliação é feita de acordo com ele: $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$.

Semântica

$$
\begin{aligned}
[\![x]\!]^{\mathcal{M}} &= \mathcal{V}(x) \\
[\![P(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{M}} &= P^{\mathcal{I}}([\![x_1]\!]^{\mathcal{M}}, \ldots, [\![x_n]\!]^{\mathcal{M}}) \\
[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}} &= \text{T sse } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = F \\
[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]^{\mathcal{M}} &= \text{T see } ([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}} = T \text{ e } [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{M}} = T) \\
[\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]^{\mathcal{M}} &= \text{T sse } ([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}} = T \text{ ou } [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{M}} = T) \\
[\![\varphi_1 \rightarrow \varphi_2]\!]^{\mathcal{M}} &= \text{T sse } ([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{M}} = F \text{ ou } [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{M}} = T) \\
[\![\forall x.\, \varphi]\!]^{\mathcal{M}} &= \text{T sse } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_{x \mapsto d}} = T \textit{ para todo} \\
&\quad\ \text{elemento } d \text{ do domínio de } x. \\
[\![\exists x.\, \varphi]\!]^{\mathcal{M}} &= \text{T sse } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_{x \mapsto d}} = T \textit{ para ao menos um} \\
&\quad\ \text{elemento } d \text{ do domínio de } x.
\end{aligned}
$$

em que $\mathcal{M}_{x \mapsto d}$ é um modelo cuja valoração $\mathcal{V}$ é tal que $\mathcal{V}(x) = d$.

Equivalências lógicas envolvendo quantificadores

- Afirmações envolvendo predicados são logicamente equivalentes se, e somente se, elas têm o mesmo valor de verdade independentemente de quais interpretações de predicados e domínios de discurso são utilizados, i.e., se são iguais para todos os modelos possíveis.

  Usamos

$$S \equiv T$$

  para denotar que S e T são equivalentes.

Negando expressões quantificadas

- A negação de expressões quantificadas é dada por equivalências conhecidas como **leis de De Morgan**:

Leis de De Morgan para quantificadores
$\neg\forall x.\, P(x) \equiv \exists x.\, \neg P(x)$
$\neg\exists x.\, P(x) \equiv \forall x.\, \neg P(x)$

- Equivalências que seguem das leis de De Morgan são:

Outras equivalências de negação
$\forall x.\, P(x) \equiv \neg\exists x.\, \neg P(x)$
$\exists x.\, P(x) \equiv \neg\forall x.\, \neg P(x)$

Negando expressões quantificadas universalmente

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$

$$P: \quad \forall x \in \mathbb{R}.\, x^2 \geq 0$$

$$\neg P: \quad \neg\forall x \in \mathbb{R}.\, x^2 \geq 0 \quad \equiv \quad \exists x \in \mathbb{R}.\, \neg(x^2 \geq 0) \quad \equiv \quad \exists x \in \mathbb{R}.\, x^2 < 0$$

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$

P : *"Todos os programas de computador são finitos."*

$\neg P$: *"Nem todos os programas de computador que são finitos."* $\equiv$
"Existe um programa de computador que não é finito."

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$

P : *"Todo mundo gosta de sorvete ou de bolo."*

$\neg P$: *"Nem todo mundo gosta de sorvete ou de bolo."* $\equiv$
"Existe uma pessoa que não gosta de sorvete nem de bolo."

Negando expressões quantificadas existencialmente

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$

$$P: \quad \exists x \in \mathbb{N}.\, x^2 = x$$

$$\neg P: \quad \neg\exists x \in \mathbb{N}.\, x^2 = x \quad \equiv \quad \forall x \in \mathbb{N}.\, \neg(x^2 = x) \quad \equiv \quad \forall x \in \mathbb{N}.\, x^2 \neq x$$

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$

P : *"Alguns peixes respiram ar."*

$\neg P$: *"Nenhum peixe respira ar."*

- $\boxed{\text{Exemplo 14}}$

P : *"Alguns esportistas são brasileiros e jovens."*

$\neg P$: *"Nenhum esportista é brasileiro e jovem."* $\equiv$
"Todo esportista não é brasileiro ou não é jovem."

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Expresse como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural:
  - *"Nenhuma arara é pequena."*
  - *"Araras são coloridas e grandes."*
  - *"Existe uma arara que não é colorida, nem pequena."*

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Expresse como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural:
  - *"Nenhuma arara é pequena."*
  - *"Araras são coloridas e grandes."*
  - *"Existe uma arara que não é colorida, nem pequena."*

Solução.

Primeiro tomamos como universo de discurso o conjunto de todos os animais, então definimos os seguintes predicados (e suas interpretações):

$$A(x): \quad \textit{"x é uma arara"}$$

$$C(x): \quad \textit{"x é colorido"}$$

$$P(x): \quad \textit{"x é pequeno"}$$

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ (Continuação)

  Assim podemos traduzir as afirmações para linguagem formal como abaixo.

  (Neste problema, supomos que tudo que não é pequeno é grande, sem meio termo.)

  - *"Nenhuma arara é pequena"*:

    $$\neg\exists x.\,(\, A(x) \,\wedge\, P(x)\,)$$

    Forma equivalente:

    $$\forall x.\,(\, A(x) \,\rightarrow\, \neg P(x)\,)$$

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ (Continuação)

  - *"Araras são coloridas e grandes"*:

$$\forall x.\,(\ A(x)\ \rightarrow\ C(x) \land \neg P(x)\ )$$

  - *"Existe uma arara que não é colorida, nem pequena"*:

$$\exists x.\,(\,A(x) \land \neg C(x) \land \neg P(x)\,)$$

- $\boxed{\text{Exemplo 16}}$ Encontre uma forma equivalente para as duas últimas expressões quantificadas do exemplo anterior, trocando o quantificador existencial pelo universal e vice-versa. (Note que você pode usar a negação de quantificadores sempre que necessário.)

  Solução. Exercício para o(a) estudante!

Quantificadores aninhados

Quantificadores aninhados: Introdução

- Muitas expressões usam múltiplos **quantificadores aninhados**.

  Por exemplo, no universo de discurso dos números reais, temos o seguinte.

  1. A expressão

     $$\forall x.\, \forall y.\, (\ (x > 0) \wedge (y < 0) \ \rightarrow\ (xy < 0)\,)$$

     significa

     "O produto de quaisquer dois reais de sinais opostos é um real negativo."

  2. A expressão

     $$\forall x.\, \exists y.\, (x + y = 0)$$

     significa

     "Todo número real tem um número real oposto (isto é, que somado ao original resulta em zero)."

Entendendo quantificadores aninhados

- $\boxed{\text{Exemplo 17}}$ Seja o seguinte predicado sobre o domínio de todas as pessoas:

$$A(x, y): \quad \text{"}\textit{A pessoa } x \textit{ ama a pessoa } y\text{"}$$

  - $\forall x.\, \exists y.\, A(x, y)$ significa *"Todo mundo ama alguém."*
  - $\exists y.\, \forall x.\, A(x, y)$ significa *"Existe alguém que é amado por todo mundo."*
  - $\forall y.\, \exists x.\, A(x, y)$ significa *"Todo mundo é amado por alguém."*
  - $\exists x.\, \forall y.\, A(x, y)$ significa *"Existe alguém que ama todo mundo."*

A ordem dos quantificadores

- $\boxed{\text{Exemplo 18}}$ Seja o universo de discurso o conjunto dos números reais. Para cada afirmação, diga o que ela significa em linguagem natural e se ela é verdadeira ou falsa.

  - $\forall x.\, \exists y.\, x < y$ significa

A ordem dos quantificadores

- $\boxed{\text{Exemplo 18}}$ Seja o universo de discurso o conjunto dos números reais. Para cada afirmação, diga o que ela significa em linguagem natural e se ela é verdadeira ou falsa.

  - $\forall x.\, \exists y.\, x < y$ significa

    "Para todo número real x, existe outro real maior que x."

    Esta afirmação é <u>verdadeira</u>.

  - $\exists y.\, \forall x.\, x < y$ significa

A ordem dos quantificadores

- $\boxed{\text{Exemplo 18}}$ Seja o universo de discurso o conjunto dos números reais. Para cada afirmação, diga o que ela significa em linguagem natural e se ela é verdadeira ou falsa.

  - $\forall x.\, \exists y.\, x < y$ significa

    "Para todo número real x, existe outro real maior que x."

    Esta afirmação é <u>verdadeira</u>.

  - $\exists y.\, \forall x.\, x < y$ significa

    "Existe um número real que é maior que todos os demais números reais."

    Esta afirmação é <u>falsa</u>.

  As afirmações do exemplo anterior não são equivalentes logicamente.

  <u>Em geral, ao se trocar a ordem de quantificadores de tipo diferente, o sentido da afirmação se altera.</u>

Quantificação sobre duas variáveis

- Quantificadores podem ser aninhados em vários níveis.

  Em particular, é comum encontrar quantificadores aninhados em dois níveis.

Afirmação	**Quando é verdadeira?**	**Quando é falsa?**
$\forall x.\, \forall y.\, P(x, y)$ $\forall y.\, \forall x.\, P(x, y)$	$P(x, y)$ é verdadeiro para todo par x, y.	Existe um par x, y tal que $P(x, y)$ é falso.
$\forall x.\, \exists y.\, P(x, y)$	Para todo x existe um y tal que $P(x, y)$ é verdadeiro.	Existe um x tal que $P(x, y)$ é falso para todo y.
$\exists x.\, \forall y.\, P(x, y)$	Existe um x tal que $P(x, y)$ é verdadeiro para todo y.	Para todo x existe um y tal que $P(x, y)$ é falso.
$\exists x.\, \exists y.\, P(x, y)$ $\exists y.\, \exists x.\, P(x, y)$	Exite um par x, y tal que $P(x, y)$ é verdadeiro.	$P(x, y)$ é falso para todo par x, y.

De afirmações quantificadas para linguagem natural

- $\boxed{\text{Exemplo 19}}$ Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$C(x): \quad \textit{“x tem um computador”}$$

$$F(x,y): \quad \textit{“x e y são amigos”}$$

  - $\forall x.\, (\ C(x) \lor \exists y.\, (\, C(y) \land F(x,y)\,)\ )$ significa

    “Todo estudante tem um computador, ou tem um amigo que tenha um computador.”

  - $\exists x.\, \forall y.\, \forall z.\, (\ F(x,y) \land F(x,z) \land (y \neq z) \ \rightarrow\ \neg F(y,z)\ )$ significa

    “Existe um estudante cujos amigos não são amigos entre si.”

De linguagem natural para afirmações lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 20}}$ Expresse como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural, considerando que estamos falando apenas de estudantes da universidade:
  - *"Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir."*
  - *"Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba."*
  - *"Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir."*

De linguagem natural para afirmações lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 20}}$ Expresse como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural, considerando que estamos falando apenas de estudantes da universidade:
  - *"Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir."*
  - *"Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba."*
  - *"Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir."*

Solução.

Primeiro definimos os seguintes predicados sobre o universo de todos os estudantes da universidade:

$$D(x): \quad \text{“}x \textit{ sabe dirigir}\text{”}$$

$$A(x, y): \quad \text{“}x \textit{ e } y \textit{ são amigos}\text{”}$$

Assim podemos traduzir as afirmações para linguagem formal como a seguir.

De linguagem natural para afirmações lógicas

- Exemplo 20 (Continuação)

1. *"Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir"*:

$$\forall x.\, \exists y.\, (\, A(x,y) \wedge \neg D(y)\,)$$

2. *"Há um estudante que não sabe dirigir e não tem nenhum amigo que saiba"*:

$$\exists x.\, (\ \neg D(x) \ \wedge\ \forall y.\, (\, A(x,y) \rightarrow \neg D(y)\,)\ )$$

3. *"Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir"*:

$$\forall x.\, \exists y.\, (\ A(x,y) \ \wedge\ \neg D(y) \ \wedge\ \forall z.\, (\, A(x,z) \wedge \neg D(z) \ \rightarrow\ y = z\,)\ )$$

ou, de forma equivalente:

$$\forall x.\, \exists y.\, (\ A(x,y) \ \wedge\ \neg D(y) \ \wedge\ \forall z.\, (\, A(x,z) \wedge y \neq z \ \rightarrow\ D(z)\,)\ )$$

Negação de quantificadores aninhados

- A negação de quantificadores aninhados usa as mesmas leis de De Morgan para negação de quantificadores.

Leis de De Morgan para negação
$\neg\forall x.\, P(x) \;\equiv\; \exists x.\, \neg P(x)$
$\neg\exists x.\, P(x) \;\equiv\; \forall x.\, \neg P(x)$

Notando que $P(x)$ pode ser ela mesma uma expressão quantificada.

- $\boxed{\text{Exemplo 21}}$ Seja $A(x, y)$ a afirmação *"A pessoa x ama a pessoa y"* com universo de discurso como sendo todas as pessoas do mundo.

$$P: \quad \forall x.\, \exists y.\, A(x, y) \qquad \text{“Todo mundo ama alguém”}$$

$$\begin{aligned} \neg P: \quad & \neg\forall x.\, \exists y.\, A(x, y) \equiv \\ & \exists x.\, \neg\exists y.\, A(x, y) \equiv \\ & \exists x.\, \forall y.\, \neg A(x, y) \qquad \text{“Existe alguém que não ama ninguém.”} \end{aligned}$$

Negação de quantificadores aninhados

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$D(x): \quad \text{“}x \textit{ sabe dirigir”}$$

$$A(x,y): \quad \text{“}x \textit{ e } y \textit{ são amigos”}$$

Afirmação P:

$$\mathbf{P}: \quad \forall x.\, \exists y.\, (\, A(x,y) \wedge \neg D(y)\,)$$

Afirmativa: *“Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir.”*

$$\neg\mathbf{P}: \quad \exists x.\, \forall y.\, (\, A(x,y) \rightarrow D(y)\,)$$

Negação: *“Existe um estudante cujos amigos todos sabem dirigir.”*

Negação de quantificadores aninhados

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ (Continuação)

Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$D(x): \quad \text{"}x \textit{ sabe dirigir"}$$

$$A(x,y): \quad \text{"}x \textit{ e } y \textit{ são amigos"}$$

Afirmação Q:

$$\mathbf{Q}: \quad \exists x.\,(\,\neg D(x) \;\wedge\; \forall y.\,(\,A(x,y) \rightarrow \neg D(y)\,)\,)$$

Afirmativa: *"Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem"*
"nenhum amigo que saiba."

$$\neg\mathbf{Q}: \quad \forall x.\,(\;D(x) \;\vee\; \exists y.\,(\,A(x,y) \wedge D(y)\,)\,)$$

Negação: *"Todo estudante sabe dirigir, ou tem um amigo que sabe."*

Negação de quantificadores aninhados

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ (Continuação)

Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$D(x): \quad \text{“}x \textit{ sabe dirigir”}$$

$$A(x,y): \quad \text{“}x \textit{ e } y \textit{ são amigos”}$$

Afirmação R:

$$\mathbf{R}: \quad \forall x.\, \exists y.\, (A(x,y) \land \neg D(y) \land \forall z.\, (A(x,z) \land \neg D(z) \rightarrow y = z))$$

Afirmativa: *“Cada estudante tem exatamente um amigo que”*
“não sabe dirigir.”

$$\neg\mathbf{R}: \quad \exists x.\, \forall y.\, (A(x,y) \rightarrow (D(y) \lor \exists z.\, (A(x,z) \land \neg D(z) \land y \neq z)))$$

Negação: *“Existe um estudante que não possui amigos que não dirijam”*
“ou que possui ao menos dois amigos que não dirijam.”

Outros tipos de quantificadores

- Até agora introduzimos os quantificadores existencial e universal.

  Estes quantificadores são os mais importantes em matemática e em computação.

- Nada impede, entretanto, que se definam outros quantificadores, como:

  1. *"Existem pelo menos 3"*
  2. *"Existem no máximo 100"*
  3. *"Existe exatamente 1"*
  4. *"Existem exatamente 35"*

  Neste curso, entretanto, vamos nos ater apenas aos quantificadores existencial e universal, por duas boas razões:

  1. os demais podem ser representados usando apenas os quantificadores existencial e universal; e
  2. as regras de inferência que veremos mais adiante no curso são muito mais simples se usarmos apenas estes quantificadores.

  A seguir veremos alguns exemplos de como esses novos quantificadores podem ser escritos em função apenas do existencial e do universal.

Outros tipos de quantificadores

- $\boxed{\text{Exemplo 23}}$ Dado um predicado $P(x)$, vamos definir o conceito de **quantificação de no máximo 1**

$$\exists_{\leq 1} x.\, P(x)$$

significando

"Existe no máximo um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro",

que é verdadeira se zero ou exatamente um valor de x no domínio torna $P(x)$ verdadeira, e é falsa se dois ou mais valores de x no domínio tornam $P(x)$ verdadeira.

Mostre que o quantificador $\exists_{\leq 1}$ pode ser escrito usando apenas os quantificadores existencial $\exists$ e universal $\forall$.

Outros tipos de quantificadores

- $\boxed{\text{Exemplo 23}}$ (Continuação)

Solução.

Note que falar que existe no máximo um valor de x que satisfaz $P(x)$ significa dizer que se há dois valores x_1 e x_2 que satisfazem $P(x)$, então x_1 e x_2 são iguais:

$$\exists_{\leq 1} x.\, P(x) \quad \equiv \quad \forall x_1.\, \forall x_2.\ (\ P(x_1) \wedge P(x_2) \ \rightarrow\ x_1 = x_2\ )$$

Alternativamente, podemos tomar a contrapositiva e dizer que se x_1 e x_2 são diferentes, então não podemos ter $P(x_1)$ e $P(x_2)$ verdadeiros ao mesmo tempo:

$$\exists_{\leq 1} x.\, P(x) \quad \equiv \quad \forall x_1.\, \forall x_2.\ (\ x_1 \neq x_2 \ \rightarrow\ \neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)\ )$$

Outros tipos de quantificadores: unicidade

- $\boxed{\text{Exemplo 24}}$ Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação de unicidade** é

$$\exists! x.\ P(x)$$

significando

"Existe exatamente um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro",

que é verdadeira se exatamente um valor de x no domínio torna $P(x)$ verdadeira, e é falsa se zero ou mais de um valor de x no domínio tornam $P(x)$ verdadeira.

Mostre que o quantificador $\exists!$ pode ser escrito usando apenas os quantificadores existencial $\exists$ e universal $\forall$.

Solução. Desafio para o(a) estudante!

(Relembrando: nas listas nas provas é esperado que você use apenas os quantificadores existencial e universal!)

Proposições condicionais universais

Afirmação condicional universal

- Uma **afirmação condicional universal** tem a forma

$$\forall x.\, (\, P(x) \rightarrow Q(x)\,)$$

- Proposições desta forma são muito comuns.

  1. *"Se um número real é maior que 2 então seu quadrado é maior que 4"*:

  $$\forall x \in \mathbb{R}.\, (\ (x > 2)\ \rightarrow\ (x^2 > 4)\ )$$

  2. *"Todo byte tem oito bits"*:

  $$\forall x.\ \ \text{"se } x \text{ é um byte, então } x \text{ tem oito bits"}.$$

- Lembre-se de que as duas proposições seguintes são equivalentes:

$$\forall x.\, (\, x \in D\ \rightarrow\ P(x)\,) \quad \equiv \quad \forall x \in D.\, P(x)$$

No geral prefere-se a segunda forma.

Negação de proposições condicionais universais

- A negação de uma afirmação condicional universal é derivada como:

$$\begin{aligned}
\neg\forall x.\,(\,P(x) \to Q(x)\,) &\equiv \exists x.\,\neg(\,P(x) \to Q(x)\,) && \text{(por De Morgan)}\\
&\equiv \exists x.\,\neg(\,\neg P(x) \lor Q(x)\,) && \text{(por equiv. de impl.)}\\
&\equiv \exists x.\,(\,P(x) \land \neg Q(x)\,) && \text{(por De Morgan)}
\end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Exemplo 25}}$

P : *"Toda pessoa loira tem olhos azuis."*

$\neg P$: *"Existe uma pessoa loira que não tem olhos azuis."*

- $\boxed{\text{Exemplo 26}}$

P : *"Se um programa foi escrito em C, ele tem um erro."*

$\neg P$: *"Existe pelo menos um programa escrito em C que não tenha erro."*

Verdade por vacuidade de proposições universais

- Lembre-se de que se a premisa p é falsa, a implicação

$$p \to q$$

é sempre verdadeira, independente de q.

- Portanto, se $P(x)$ é falso para cada x no universo de discurso D, então uma afirmação da forma

$$\forall x \in D. \, (\, P(x) \to Q(x) \,)$$

é verdadeira, já que a implicação $P(x) \to Q(x)$ é verdadeira para todo x.

Verdade por vacuidade de proposições universais

- $\boxed{\text{Exemplo 27}}$ Sejam cinco bolas azuis, cinco brancas e um prato.
  - **Cenário 1**: três bolas azuis e uma branca são colocadas no prato.

    A afirmação

    "Todas as bolas no prato são azuis"

    é verdadeira ou falsa?

    Para ver que a afirmação é falsa, note que sua negativa é verdadeira:

    "Existe pelo menos uma bola no prato que não é azul."

Verdade por vacuidade de proposições universais

- $\boxed{\text{Exemplo 27}}$ (Continuação)

  Sejam cinco bolas azuis, cinco brancas e um prato.

  - **Cenário 2**: nenhuma bola é colocada no prato.

    A afirmação

    "Todas as bolas no prato são azuis"

    é verdadeira ou falsa?

    Para ver que a afirmação é verdadeira, note que sua negativa é falsa:

    "Existe pelo menos uma bola no prato que não é azul."

    Uma outra maneira para ver que a afirmação é verdadeira é escrevê-la explicitamente como uma afirmação universal em que a hipótese da implicação é sempre falsa (e, portanto, a implicação é sempre verdadeira):

    "Para toda bola, temos que se ela está no prato, então ela é azul."