DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.2

Lógica Proposicional: Semântica e Satisfatibilidade

Área de Teoria DCC/UFMG

Semântica

Semântica

- A *semântica* de uma lógica corresponde a como devemos *interpretar* as afirmações feitas nela
- Em lógica proposicional, isto corresponde a como determinamos o *valor de verdade* (T ou F) de uma fórmula
- Para isso, iremos considerar as tabelas de verdade de conectivos como *funções de verdade*
- Usaremos também uma *valoração* das variáveis proposicionais:
  - Uma valoração $\mathcal{V}$ é uma atribuição de um valor de verdade a cada uma das variáveis proposicionais
  - Por exemplo, para uma fórmula $p \vee q$, uma valoração $\mathcal{V}$ pode ser: $\mathcal{V}(p) = T$, $\mathcal{V}(q) = F$.

Semântica

- Dada uma valoração $\mathcal{V}$, definimos o valor de verdade de φ em $\mathcal{V}$, i.e., $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{V}}$, como:

$$
\begin{array}{ll}
[\![p]\!]^{\mathcal{V}} & = \mathcal{V}(p) \\
[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{V}} & = \text{T sse } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{V}} = F \\
[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]^{\mathcal{V}} & = \text{T see } ([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{V}} = T \text{ e } [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{V}} = T) \\
[\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]^{\mathcal{V}} & = \text{T sse } ([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{V}} = T \text{ ou } [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{V}} = T) \\
[\![\varphi_1 \oplus \varphi_2]\!]^{\mathcal{V}} & = \text{T sse } [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{V}} \neq [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{V}} \\
[\![\varphi_1 \rightarrow \varphi_2]\!]^{\mathcal{V}} & = \text{T sse } ([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{V}} = F \text{ ou } [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{V}} = T) \\
[\![\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2]\!]^{\mathcal{V}} & = \text{T sse } [\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{V}} = [\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{V}}
\end{array}
$$

- Note que $\mathcal{V}$ deve mapear *todas* as variáveis proposicionais de φ para um valor de verdade.

- Note que como os casos acima são definidos com um “sse”, quando o valor de verdade não é “T”, será “F”.

Satisfatibilidade

Satisfatibilidade

- Um fórmula φ é **satisfatível** quando existe uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{V}} = T$
  - Se tal atribuição de valores não existe, a fórmula é **insatisfatível**.
  - O problema de determinar se uma fórmula é satisfatível é chamado de **problema de satisfatibilidade (SAT)**.

- Note que uma fórmula é insatisfatível quando ela é uma contradição.

Satisfatibilidade

- A atribuição de valores às variáveis que torna a fórmula verdadeira é chamada de **solução** do problema SAT em questão.

- Para mostrar que uma expressão é satisfatível basta encontrar uma solução.
  - Já para mostrar insatisfatibilidade, temos que mostrar que *não existe solução*.
  - Podemos fazer isso usando tabelas da verdade, mas isto é trabalhoso.

Satisfatibilidade

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Determine se cada uma das expressões abaixo é satisfatível.

  1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
  2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
  3. $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (p \oplus r)$

Solução.

1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ é

Satisfatibilidade

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Determine se cada uma das expressões abaixo é satisfatível.

  1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
  2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
  3. $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (p \oplus r)$

Solução.

1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ é <u>satisfatível</u>: a valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(p) = T$, $\mathcal{V}(q) = T$, $\mathcal{V}(r) = T$ é uma solução que torna a expressão verdadeira.
2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ é

Satisfatibilidade

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Determine se cada uma das expressões abaixo é satisfatível.

  1. $(p \lor \neg q) \land (q \lor \neg r) \land (r \lor \neg p)$
  2. $(p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$
  3. $(p \leftrightarrow q) \land (q \leftrightarrow r) \land (p \oplus r)$

Solução.

1. $(p \lor \neg q) \land (q \lor \neg r) \land (r \lor \neg p)$ é <u>satisfatível</u>: a valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(p) = T$, $\mathcal{V}(q) = T$, $\mathcal{V}(r) = T$ é uma solução que torna a expressão verdadeira.
2. $(p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$ é <u>satisfatível</u>: a valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(p) = T$, $\mathcal{V}(q) = F$, $\mathcal{V}(r) = F$ é uma solução que torna a expressão verdadeira.
3. $(p \leftrightarrow q) \land (q \leftrightarrow r) \land (p \oplus r)$ é

Satisfatibilidade

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Determine se cada uma das expressões abaixo é satisfatível.

1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
3. $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (p \oplus r)$

Solução.

1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ é satisfatível: a valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(p) = T$, $\mathcal{V}(q) = T$, $\mathcal{V}(r) = T$ é uma solução que torna a expressão verdadeira.
2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ é satisfatível: a valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(p) = T$, $\mathcal{V}(q) = F$, $\mathcal{V}(r) = F$ é uma solução que torna a expressão verdadeira.
3. $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (p \oplus r)$ é instatisfazível: uma tabela da verdade mostra que nenhuma atribuição de valores a p, q, r torna a expressão verdadeira.

   Ou: note que a fórmula não tem solução porque ela exige que p e q tenham o mesmo valor de verdade ($p \leftrightarrow q$), assim como q e r ($q \leftrightarrow r$), mas também exige que p e r tenham valores diferentes ($p \oplus r$), o que é absurdo.

O problema das n rainhas

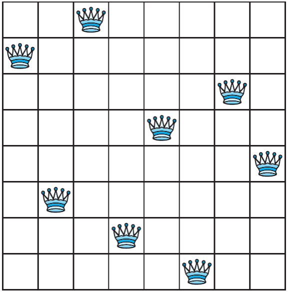
Satisfatibilidade: Aplicações

- Muitos problemas em ciência da computação (robótica, inteligência artificial, visão computacional, ...) e em outras áreas (genética, planejamento de cronogramas, ...) podem ser modelados como problemas de satisfatibilidade.

- Exemplo 2 **O problema da *n* rainhas.** O problema consiste em posicionar n rainhas em um tabuleiro de xadrez de tamanho $n \times n$ sem que nenhuma rainha possa "atacar" outra rainha.

  Isso quer dizer que não pode haver duas rainhas posicionadas em uma mesma linha, em uma mesma coluna, ou em uma mesma diagonal.

  Por exemplo, uma solução para o problema quando há $n = 8$ rainhas é dada ao lado.



Satisfatibilidade: Aplicações

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

Podemos modelar o problema das n rainhas como um problema de satisfatibilidade como a seguir.

Sejam n^2 variáveis $p_{i,j}$, com

- $i = 1, 2, \ldots, n$
- $j = 1, 2, \ldots, n$.

Dada uma configuração do tabuleiro:

$$p_{i,j} = \begin{cases} \text{T}, & \text{se há uma rainha na linha } i \text{ e coluna } j \text{, e} \\ \text{F}, & \text{se não há uma rainha na linha } i \text{ e coluna } j. \end{cases}$$

A valoração $\mathcal{V}$ correspondente ao exemplo anterior é então

1. $\mathcal{V}(p_{2,1}) = T$
2. $\mathcal{V}(p_{6,2}) = T$
3. $\ldots$
4. $\mathcal{V}(p_{1,1}) = F$
5. $\mathcal{V}(p_{1,2}) = F$
6. $\ldots$

Satisfatibilidade: Aplicações

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Uma questão central do problema é identificar quando duas casas do tabuleiro estão na mesma diagonal.

  Note que dizer que duas casas i, j e i', j' estão na mesma digonal significa dizer que para ir da casa i, j à casa i', j' precisamos mover o mesmo número de casas na vertical (linhas) e na horizontal (colunas).

  Em outras palavras, i, j e i', j' estão na mesma diagonal se a distância entre as linhas e as colunas de i, j e i', j' for a mesma:

$$
\begin{aligned}
&i - i' = j - j' && \text{ou} \\
&i - i' = -(j - j') \; .
\end{aligned}
$$

Satisfatibilidade: Aplicações

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Agora estamos prontos para verificar as condições necessárias para o problema ter solução:

  - Há pelo menos uma rainha em cada linha:

$$Q_1 : \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} p_{i,j}$$

Por exemplo, no caso de um tabuleiro 3×3, a condição acima equivale a:

$$\begin{aligned} Q_1 : &(p_{1,1} \vee p_{1,2} \vee p_{1,3}) \wedge \\ &(p_{2,1} \vee p_{2,2} \vee p_{2,3}) \wedge \\ &(p_{3,1} \vee p_{3,2} \vee p_{3,3}) \end{aligned}$$

Satisfatibilidade: Aplicações

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Note que, para o problema ter solução, as seguintes condições têm que ser satisfeitas:

  - Há no máximo uma rainha em cada linha:

$$Q_2 : \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bigwedge_{k=j+1}^{n} (p_{i,j} \rightarrow \neg p_{i,k})$$

Por exemplo, no caso de um tabuleiro 3×3, a condição acima equivale a:

$$\begin{aligned} Q_2 : & ((p_{1,1} \rightarrow \neg p_{1,2}) \wedge (p_{1,1} \rightarrow \neg p_{1,3}) \wedge (p_{1,2} \rightarrow \neg p_{1,3})) \wedge \\ & ((p_{2,1} \rightarrow \neg p_{2,2}) \wedge (p_{2,1} \rightarrow \neg p_{2,3}) \wedge (p_{2,2} \rightarrow \neg p_{2,3})) \wedge \\ & ((p_{3,1} \rightarrow \neg p_{3,2}) \wedge (p_{3,1} \rightarrow \neg p_{3,3}) \wedge (p_{3,2} \rightarrow \neg p_{3,3})) \end{aligned}$$

Satisfatibilidade: Aplicações

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Note que, para o problema ter solução, as seguintes condições têm que ser satisfeitas:

  - Há no máximo uma rainha em cada coluna:

$$Q_3 : \quad \bigwedge_{j=1}^{n} \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{k=i+1}^{n} (p_{i,j} \rightarrow \neg p_{k,j})$$

  Por exemplo, no caso de um tabuleiro 3×3, a condição acima equivale a:

$$\begin{aligned} Q_3 : \; & ((p_{1,1} \rightarrow \neg p_{2,1}) \wedge (p_{1,1} \rightarrow \neg p_{3,1}) \wedge (p_{2,1} \rightarrow \neg p_{3,1})) \wedge \\ & ((p_{1,2} \rightarrow \neg p_{2,2}) \wedge (p_{1,2} \rightarrow \neg p_{3,2}) \wedge (p_{2,2} \rightarrow \neg p_{3,2})) \wedge \\ & ((p_{1,3} \rightarrow \neg p_{2,3}) \wedge (p_{1,3} \rightarrow \neg p_{3,3}) \wedge (p_{2,3} \rightarrow \neg p_{3,3})) \end{aligned}$$

  (Note que Q_3 e Q_1 (toda linha contém pelo menos uma rainha) juntas implicam que cada coluna contém pelo menos uma rainha.)

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Note que, para o problema ter solução, as seguintes condições têm que ser satisfeitas:

  - Nenhuma diagonal contém duas rainhas:

$$Q_4 : \quad \bigwedge_{i=2}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bigwedge_{k=1}^{\min(i-1,n-j)} (p_{i,j} \to \neg p_{i-k,k+j})$$

$$Q_5 : \quad \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bigwedge_{k=1}^{\min(n-i,n-j)} (p_{i,j} \to \neg p_{i+k,j+k})$$

  (Encontrar a expansão das condições acima para o caso de um tabuleiro 3×3 fica como dever de casa!)