DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.2

Lógica Proposicional: Aplicações, Equivalências

Área de Teoria DCC/UFMG

Aplicações da Lógica Proposicional

Aplicações da lógica proposicional: Introdução

- A lógica tem importantes aplicações na matemática, ciência da computação, e diversas outras disciplinas:
  1. tradução de afirmações em linguagem natural, frequentemente ambíguas, para uma linguagem precisa,
  2. especificação de circuitos lógicos,
  3. solução de quebra-cabeças (o que é essencial para inteligência artificial),
  4. automatização do processo de construção de demonstrações matemáticas,
  5. ...
- Nesta seção vamos exemplificar algumas destas aplicações práticas da lógica proposicional.

Traduzindo afirmações em linguagem natural

- Afirmações em linguagem natural são frequentemente ambíguas, o que pode causar problemas de comunicação.

- Traduzir afirmações em linguagem natural para proposições compostas remove a ambiguidade.

- Uma vez traduzidas para proposições lógicas, estas afirmações podem ser analisadas quanto ao seu valor de verdade.

Traduzindo afirmações em linguagem natural

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Seja a afirmação em linguagem natural:

  "Você não pode andar na montanha russa se você tiver menos que 1,50m de altura, a menos que você tenha mais de 16 anos."

  Podemos traduzí-la para uma proposição composta, usamos as seguintes proposições:

  - q : *"você pode andar na montanha russa"*,
  - r : *"você tem menos que 1,50m de altura"*,
  - s : *"você tem mais de 16 anos"*.

  A afirmação em linguagem natural é, então, traduzida para:

  $$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q.$$

  (Note que esta não é a única maneira de representar esta afirmação.)

Especificação de sistemas

- Traduzir afirmações de linguagem natural para linguagem lógica é parte essencial da especificação de sistemas de hardware e software.

$\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Expresse a especificação abaixo como uma proposição composta.

"A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema de arquivos está cheio."

Especificação de sistemas

- Traduzir afirmações de linguagem natural para linguagem lógica é parte essencial da especificação de sistemas de hardware e software.

$\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Expresse a especificação abaixo como uma proposição composta.

"A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema de arquivos está cheio."

Solução. Podemos traduzir a especificação para uma proposição composta, usando as seguintes proposições:

- r : *"a reposta automática pode ser enviada"*,
- c : *"o sistema de arquivos está cheio"*.

Especificação de sistemas

- Traduzir afirmações de linguagem natural para linguagem lógica é parte essencial da especificação de sistemas de hardware e software.

$\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Expresse a especificação abaixo como uma proposição composta.

"A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema de arquivos está cheio."

Solução. Podemos traduzir a especificação para uma proposição composta, usando as seguintes proposições:

- r : *"a reposta automática pode ser enviada"*,
- c : *"o sistema de arquivos está cheio"*.

A especificação fica, então, traduzida para:

$$c \to \neg r.$$

Especificação de sistemas

- Especificações de sistemas devem ser **consistentes**.
  - Não devem conter requisitos conflitantes.
  - Senão, seria possível derivar uma contradição.

  Quando as especificações não são consistentes, não é possível desenvolver um sistema que satisfaça todos os requisitos.

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Determine se a seguinte especificação de sistema é consistente:
  - *"A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer ou é retransmitida."*
  - *"A mensagem de diagnóstico não está armazenada no buffer."*
  - *"Se a mensagem de diagnóstico estiver armazenada no buffer, ela será retransmitida."*

Especificação de sistemas

- Especificações de sistemas devem ser **consistentes**.
  - Não devem conter requisitos conflitantes.
  - Senão, seria possível derivar uma contradição.

  Quando as especificações não são consistentes, não é possível desenvolver um sistema que satisfaça todos os requisitos.

- Exemplo 3 Determine se a seguinte especificação de sistema é consistente:
  - *"A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer ou é retransmitida."*
  - *"A mensagem de diagnóstico não está armazenada no buffer."*
  - *"Se a mensagem de diagnóstico estiver armazenada no buffer, ela será retransmitida."*

  Solução. Para determinar se essas especificações são consistentes, primeiro vamos representar seus componentes como expressões lógicas:
  - p : *"A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer."*
  - q : *"A mensagem de diagnóstico é retransmitida."*

Especificação de sistemas

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ (Continuação)

  Assim, a especificação do sistema pode ser reescrita como:

  - $p \vee q$
  - $\neg p$
  - $p \rightarrow q$

  Podemos verificar se especificação é consistente com uma tabela da verdade que mostra se é possível satisfazer todos os três requisitos ao mesmo tempo.

Especificação de sistemas

- Exemplo 3 (Continuação)

Assim, a especificação do sistema pode ser reescrita como:

- $p \vee q$
- $\neg p$
- $p \rightarrow q$

Podemos verificar se especificação é consistente com uma tabela da verdade que mostra se é possível satisfazer todos os três requisitos ao mesmo tempo.

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p \vee q}$	$\mathbf{\neg p}$	$\mathbf{p \rightarrow q}$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	F
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

Note que a especificação do sistema é consistente, e ela é satisfeita quando $p = F$ e $q = T$.

Especificação de sistemas

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Suponha que adicionemos à especificação do exemplo anterior o seguinte requisito:
  - *"A mensagem de diagnóstico não é retransmitida."*

  Neste caso a especificação do sistema continua consistente?

Especificação de sistemas

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Suponha que adicionemos à especificação do exemplo anterior o seguinte requisito:
  - *"A mensagem de diagnóstico não é retransmitida."*

Neste caso a especificação do sistema continua consistente?

Solução. O novo requisito pode ser representado logicamente como $\neg q$, e a tabela da verdade atualizada é a seguinte.

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p \vee q}$	$\neg\mathbf{p}$	$\mathbf{p \rightarrow q}$	$\neg q$
T	T	T	F	T	F
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T

Pode-se notar que agora é impossível satisfazer todos os requisitos ao mesmo tempo e, portanto, <u>a especificação do sistema é inconsistente</u>.

Resolução de problemas e quebra-cabeças

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Considere uma ilha em que há apenas dois tipos de habitantes: cavaleiros, que só falam a verdade, e cavilosos, que só falam mentiras.

  Você encontra duas pessoas, A e B.

  A pessoa A diz:

  "B só diz a verdade",

  enquanto a pessoa B diz:

  "A e eu somos pessoas de tipos diferentes".

  Qual o tipo de A e o tipo de B?

  Solução.

  Dever de casa.

Equivalências Proposicionais

Equivalência de proposições: Introdução

- Um passo importante na resolução de muitos problemas é a substituição de uma afirmação por outra com mesmo valor de verdade.
- Como determinar se duas fórmulas tem sempre o mesmo valor de verdade?
- Duas fórmulas são equivalentes quando elas têm o mesmo valor para qualquer atribuição de suas variáveis.
  - Ou seja, para quaisquer valores que as proposições atômicas possam tomar.

Equivalência de proposições: Introdução

- Primeiro, vamos categorizar os tipos de fórmulas:
  - uma **tautologia** é uma expressão sempre verdadeira independentemente o valor de verdade das variáveis que nela aparecem;
  - uma **contradição** é uma expressão sempre falsa independentemente o valor de verdade das variáveis que nela aparecem;
  - uma **contingência** é uma expressão que não é nem uma tautologia, nem uma contradição.

- Exemplo 6 A tabela da verdade abaixo mostra que $(p \wedge \neg p)$ é uma contradição, enquanto a expressão $(p \vee \neg p)$ é uma tautologia.

$\mathbf{p}$	$\neg\mathbf{p}$	$\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}$	$\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{p}$
T	F	F	T
F	T	F	T

Equivalências lógicas

- Duas fórmulas φ e ψ são **logicamente equivalentes** se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

  A notação $\varphi \equiv \psi$ denota que φ e ψ são logicamente equivalentes.

- Uma maneira de determinar se $\varphi \equiv \psi$ é usando tabelas da verdade.

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Mostre que $p \to q$ e $\neg p \vee q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

  Tabela da verdade para $p \to q$ e $\neg p \vee q$:

p	**q**	$\neg$**p**	$\neg$**p** $\vee$ **q**	**p** $\to$ **q**
T	*T*	*F*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*F*	*T*	*T*	*T*

  Como a coluna correspondente a $p \to q$ e a coluna correspondente a $\neg p \vee q$ possuem sempre o mesmo valor de verdade, $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia.

  Logo $p \to q \equiv (\neg p \vee q)$.

Equivalências lógicas

- **Exemplo 8** Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução. Tabela da verdade para $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$:

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p \vee q}$	$\mathbf{\neg(p \vee q)}$	$\mathbf{\neg p}$	$\mathbf{\neg q}$	$\mathbf{\neg p \wedge \neg q}$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Uma vez que a coluna correspondente a $\neg(p \vee q)$ e a coluna correspondente a $\neg p \wedge \neg q$ possuem sempre o mesmo valor de verdade,
$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ é uma tautologia.

Logo, $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

A equivalência que demonstramos é uma das **Leis de De Morgan**:

Leis de De Morgan

$\neg(p \vee q)$	$\equiv$	$\neg p \wedge \neg q$
$\neg(p \wedge q)$	$\equiv$	$\neg p \vee \neg q$

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Mostre que $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são logicamente equivalentes.

Solução. Tabela da verdade para $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$:

p	**q**	**r**	$\mathbf{q \wedge r}$	$\mathbf{p \vee (q \wedge r)}$	$\mathbf{p \vee q}$	$\mathbf{p \vee r}$	$\mathbf{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}$
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*

Como as colunas correspondentes a $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ possuem sempre o mesmo valor de verdade, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

A equivalência que demonstramos é a **lei da distributividade da disjunção sobre a conjunção**.

Equivalências lógicas

- Algumas equivalências lógicas importantes:

Nome	Equivalência
Leis de identidade	$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$
Leis de dominância	$p \wedge F \equiv F$ $p \vee T \equiv T$
Leis de idempotência	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
Lei da dupla negação	$\neg(\neg p) \equiv p$
Leis de comutatividade	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
Leis de associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
Leis de distributividade	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Leis de De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Leis de absorção	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Leis da negação	$p \wedge \neg p \equiv F$ $p \vee \neg p \equiv T$

Equivalências lógicas

- Equivalências lógicas envolvendo proposições condicionais:

Equivalências
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

- Equivalências lógicas envolvendo proposições bicondicionais:

Equivalências
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Usos das Leis de De Morgan

- A lei

$$\neg(p \vee q) \;\equiv\; \neg p \wedge \neg q$$

  diz que a negação da disjunção é a conjunção das negações.

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ Use as Leis de De Morgan para negar a proposição:

  "Danilo vai assistir a Star Wars ou vai assistir a O Senhor dos Anéis."

Usos das Leis de De Morgan

- A lei

$$\neg(p \vee q) \;\equiv\; \neg p \wedge \neg q$$

diz que a negação da disjunção é a conjunção das negações.

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ Use as Leis de De Morgan para negar a proposição:

"Danilo vai assistir a Star Wars ou vai assistir a O Senhor dos Anéis."

Solução. Esta proposição pode ser escrita como $p \vee q$, onde p é *"Danilo vai assistir a Star Wars"*, e q é *"Danilo vai assistir a O Senhor dos Anéis"*.

Pela lei de De Morgan, a negação é $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, que se traduz em

"Danilo não vai assistir a Star Wars e nem vai assistir a O Senhor dos Anéis."

Usos das Leis de De Morgan

- A lei de De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

diz que a negação da conjunção é a disjunção das negações.

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$ Use as Leis de De Morgan para negar a proposição:

"Estela tem um celular e um computador."

Solução. Esta proposição pode ser escrita como $p \wedge q$, onde p é *"Estela tem um celular"*, e q é *"Estela tem um computador"*.

Pelas Leis de De Morgan, a negação é $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, que se traduz em

"Estela não tem um celular ou ela não tem um computador."

Construindo novas equivalências lógicas

- A tabela de verdade de uma fórmula com n variáveis tem 2^n linhas.

- Para n grande, é ineficiente construir a tabela da verdade. Por exemplo:

  1. Quanto $n = 3$, temos $2^n = 8$
  2. Quando $n = 10$, temos $2^n = 1024$

- Uma alternativa é utilizar equivalências lógicas já conhecidas para derivar novas equivalências lógicas.

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Mostre que $\neg(p \to q)$ e $p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

  $$\neg(p \to q) \equiv$$

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Mostre que $\neg(p \to q)$ e $p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

  $$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \qquad \text{(pela tabela de equiv. de condicionais)}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Mostre que $\neg(p \to q)$ e $p \land \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

$$
\begin{aligned}
\neg(p \to q) &\equiv \neg(\neg p \lor q) && \text{(pela tabela de equiv. de condicionais)} \\
&\equiv \neg(\neg p) \land \neg q && \text{(pelas Leis de De Morgan)}
\end{aligned}
$$

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Mostre que $\neg(p \to q)$ e $p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

  $$\begin{aligned} \neg(p \to q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && \text{(pela tabela de equiv. de condicionais)} \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv p \wedge \neg q && \text{(pela lei da dupla negação)} \end{aligned}$$

  Note a intuição por trás dessa equivalência:
  dizer que uma implicação é falsa ($\neg(p \to q)$) é o mesmo que dizer que sua hipótese é verdadeira mas sua conclusão é falsa ($p \wedge \neg q$).

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

  $$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv$$

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \qquad \text{(pelas Leis de De Morgan)}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

$$\begin{aligned} \neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \end{aligned}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

$$\begin{aligned} \neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(pela lei da dupla negação)} \end{aligned}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)}\\
&\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)}\\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(pela lei da dupla negação)}\\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(pela lei da distributividade)}
\end{aligned}
$$

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)}\\
&\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)}\\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(pela lei da dupla negação)}\\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(pela lei da distributividade)}\\
&\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(porque } \neg p \wedge p \equiv F\text{)}
\end{aligned}
$$

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)}\\
&\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)}\\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(pela lei da dupla negação)}\\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(pela lei da distributividade)}\\
&\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(porque } \neg p \wedge p \equiv F\text{)}\\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F && \text{(pela lei da comutatividade)}
\end{aligned}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

  Solução.

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\
&\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(pela lei da dupla negação)} \\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(pela lei da distributividade)} \\
&\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(porque } \neg p \wedge p \equiv F\text{)} \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F && \text{(pela lei da comutatividade)} \\
&\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{(pela lei de identidade)}
\end{aligned}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 14}}$ Mostre que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia.

  Solução.

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{(equivalência de condicionais)}\\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) && \text{(pela Leis de De Morgan)}\\
&\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) && \text{(comutatividade e associatividade)}\\
&\equiv T \vee T && \text{(pela lei de negação)}\\
&\equiv T && \text{(pela lei de dominância)}
\end{aligned}
$$