DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.1

Lógica Proposicional: Fundamentos

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

Lógica: Introdução

- A **lógica** é o ramo da filosofia, matemática e ciência da computação que trata das **inferências válidas**.

  A lógica é a base do raciocínio matemático e de todo o raciocínio automatizado.

- Ela estuda a **preservação da verdade** durante uma argumentação.

  A lógica concerne técnicas que garantem que:

  1. partindo de hipóteses verdadeiras,
  2. atinjamos sempre conclusões também verdadeiras.

- As regras da lógica dão significado preciso a afirmações matemáticas.

  Elas são essenciais na construção de **demonstrações matemáticas**.

Lógica: Introdução

- A lógica é fundamental em aplicações em ciência da computação:

  1. projeto de computadores e desenhos de circuitos,
  2. especificação de sistemas,
  3. escrita de programas de computador,
  4. inteligência artificial,
  5. demonstração automática de teoremas,
  6. verificação de programas,
  7. processamento de linguagem natural,
  8. ...

- A lógica se divide em vários tipos: lógica proposicional, lógica de predicados, lógica de ordem superior, lógicas não-clássicas (como intuicionista e linear), etc.

- Neste curso vamos nos concentrar na **lógica proposicional** e na **lógica de predicados**.

Lógica Proposicional

Proposições

- Uma **proposição** é uma afirmação declarativa (ou seja, uma afirmação que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ As seguintes afirmações declarativas são proposições:

  - *"Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais."* (Proposição verdadeira)
  - *"Londres é a capital da França."* (Proposição falsa)
  - "$1 + 1 = 2$." (Proposição verdadeira)
  - "$2 + 2 = 3$." (Proposição falsa)

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ As seguintes afirmações não são proposições:

  - *"Que horas são?"* (Não é uma afirmação declarativa.)
  - *"Estude com afinco para a prova."* (Não é uma afirmação declarativa.)
  - "$x + 2 = 3$." (Seu valor de verdade vai depender do valor associado a x.)

Proposições

- Nós usamos letras para denotar **variáveis proposicionais**, ou seja, variáveis que representam proposições:

$$p, q, r, s, t, \ldots$$

- O **valor de verdade** de uma proposição pode ser:
  - **verdadeiro**, denotado por V (verdadeiro) ou T (do inglês *true*), ou
  - **falso**, denotado por F (falso ou, em inglês, *false*).

- A área da lógica que lida com proposições é chamada de **lógica proposicional** ou **cálculo proposicional**.

  A lógica proposicional foi formalizada pela primeira vez pelo filósofo grego Aristóteles no Século IV AC.

Proposições compostas

- **Proposições atômicas** são aquelas que não podem ser expressas em termos de proposições mais simples.
- **Proposições compostas** podem ser criadas ao se combinarem proposições já existentes.

  A combinação de proposições é feita usando **operadores lógicos** ou **conectivos lógicos** como:

  - negação (não),
  - conjunção (e),
  - disjunção (ou),
  - implicação (implica),
  - implicação dupla (implica duplamente).
- Um outro nome que damos a proposições é *fórmulas*.

Conectivos lógicos: Negação

- Seja p uma proposição.

  A **negação de** p, denotada por $\neg p$ (ou também $\overline{p}$, $\sim p$, $!p$), é a afirmação

  "Não é o caso que p."

  Lê-se a proposição $\neg p$ como *"não p"*.

  O valor de verdade de $\neg p$ é o oposto do valor de verdade de p.

- **Tabela da verdade** para a negação $\neg q$ de uma proposição p:

Negação

p	$\neg$**p**
T	F
F	T

Conectivos lógicos: Negação

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Seja a proposição

  p: *"O computador de Haniel roda Linux."*

  A negação $\neg p$ é: *"Não é o caso que o computador de Haniel rode Linux."*

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Seja a proposição

  q: *"Carolina tem pelo menos 25 anos."*

  A negação $\neg q$ é: *"Não é o caso que Carolina tenha pelo menos 25 anos."*

  Em linguagem natural (ou seja, português), outra forma de escrever $\neg q$: *"Carolina não tem pelo menos 25 anos."*

  Mais uma forma de escrever $\neg q$: *"Carolina tem menos de 25 anos."*

Conectivos lógicos: Conjunção

- Sejam p e q proposições.

  A **conjunção de** p **e** q, denotada por $p \wedge q$, é a afirmação

  $$\text{“}p \text{ e } q\text{”}.$$

  A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando ambos p e q são verdadeiros, e é falsa em caso contrário.

- **Tabela da verdade** para a conjunção $p \wedge q$ de duas proposições p e q:

Conjunção

p	**q**	$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Conectivos lógicos: Conjunção

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Sejam as proposições:

$$p: \text{ “\textit{Hoje é sábado}”},$$

$$q: \text{ “\textit{Vou fazer o jantar}”}.$$

  A conjunção $p \wedge q$ é:

  “Hoje é sábado e vou fazer o jantar.”

- Às vezes em linguagem natural usamos “mas” para significar conjunção:

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ A proposição

  “Hoje chove, mas vou sair”

  é a conjunção $p \wedge q$ das proposições

$$p: \text{ “\textit{Hoje chove}”}$$

$$q: \text{ “\textit{Hoje vou sair}”}.$$

Conectivos lógicos: Disjunção

- Sejam p e q proposições.

  A **disjunção de** p **e** q, denotada por $p \vee q$, é a afirmação

  $$\text{“}p \text{ ou } q\text{”}.$$

  A disjunção $p \vee q$ é verdadeira quando ao menos um entre p e q é verdadeiro, e é falsa em caso contrário.

- Tabela da verdade para a disjunção $p \vee q$ de duas proposições p e q:

Disjunção

p	**q**	$\mathbf{p \vee q}$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Conectivos lógicos: Disjunção

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Sejam as proposições:

$$p: \text{“}\textit{O celular de Alice é azul}\text{”},$$

$$q: \text{“}\textit{O celular de Alice é novo}\text{”}.$$

A disjunção $p \vee q$ é:

“O celular de Alice é azul ou o celular de Alice é novo.”

Alternativamente, $p \vee q$ é:

“O celular de Alice é azul ou é novo.”

Conectivos lógicos: "Ou inclusivo" versus "ou exclusivo"

- A palavra "ou" tem dois significados diferentes em linguagem natural.
- O conectivo "ou" da disjunção corresponde ao significado de **ou inclusivo**, em que a disjunção é verdadeira <u>se ao menos uma</u> das proposições é verdadeira.
- Exemplo 8 A disjunção

  "Você pode se matricular nesta disciplina se tiver cursado Cálculo ou Programação"

  significa que podem se matricular na disciplina:

  - alunos que cursaram apenas Cálculo,
  - alunos que cursaram apenas Programação,
  - alunos que cursaram ambos Cálculo e Programação.

  Esta é uma <u>disjunção inclusiva</u>.

Conectivos lógicos: “Ou inclusivo” versus “ou exclusivo”

- O outro significado de “ou” corresponde ao **ou exclusivo**, em que a disjunção é verdadeira se exatamente uma das proposições é verdadeira.

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Se você ler na entrada de um conjunto de salas de cinema:

  “O ingresso dá direito a assistir à sessão de Star Wars ou à sessão de O Senhor dos Anéis.”

  você entende que você pode:

  - escolher assistir à sessão de *Star Wars*, mas não à de *O Senhor dos Anéis*,
  - escolher assistir à sessão de *O Senhor dos Anéis*, mas não à de *Star Wars*,
  - mas você não pode assistir a ambas as sessões de *Star Wars* e de *O Senhor dos Anéis*.

  Esta é uma disjunção exclusiva.

Conectivos lógicos: Ou exclusivo

- Sejam p e q proposições.

  O **ou exclusivo de** p **e** q, denotado por $p \oplus q$, é a afirmação

  "ou p ou q".

  O ou exclusivo $p \oplus q$ é verdadeiro quando exatamente um entre p e q é verdadeiro, e é falso em caso contrário.

  É comum ler $p \oplus q$ como *"p xor q"* (do inglês *exclusive or*).

- Tabela da verdade para o ou exclusivo $p \oplus q$ de duas proposições p e q:

Ou exclusivo

p	**q**	$\mathbf{p \oplus q}$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Conectivos lógicos: Ou exclusivo

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ Sejam as proposições

$$p: \textit{“Eu vou à festa hoje”},$$
$$q: \textit{“Eu vou ficar em casa hoje”}.$$

O ou exclusivo $p \oplus q$ é:

“Hoje ou eu vou à festa, ou eu vou ficar em casa.”

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Sejam p e q proposições.

  A **afirmação condicional** ou **implicação** $p \rightarrow q$ é a afirmação

  "se p, então q".

  - A afirmação condicional $p \rightarrow q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa.
  - *Em todos os outros casos*, definimos que a implicação é verdadeira.

- Na afirmação condicional $p \rightarrow q$:
  - p é chamada de **hipótese**, **antecedente**, ou **premissa**,
  - q é chamada de **conclusão** ou **consequente**.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Tabela da verdade para a proposição condicional $p \to q$ envolvendo duas proposições p e q:

Implicação

p	**q**	$\mathbf{p \to q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

A afirmação condicional $p \to q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e a afirmação é verdadeira caso contrário.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- A implicação $p \to q$ pode ser entendida como uma promessa:

  "Se você me garantir p, eu te garanto q."

  A promessa só é quebrada (ou falsa) quando:

  - você me garantir p e eu não te garantir q em troca.

  A promessa é mantida (ou verdadeira) quando:

  - você me garante p e eu te garanto q, ou
  - você não me garante p (e neste caso eu sou livre para te garantir q ou não sem quebrar a promessa.)

    Dizemos que neste caso a implicação é **trivialmente verdadeira**, pois a premissa é falsa.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$ Considere a implicação abaixo.

  "Se eu ganhar o prêmio, eu vou dar uma festa."

  A implicação só é <u>falsa</u> quando ganho o prêmio mas não dou uma festa.

  Se eu não ganhar o prêmio, eu posso dar uma festa ou não, sem assim quebrar minha promessa.

  Logo, se eu não ganhar o prêmio, a proposição condicional é <u>trivialmente verdadeira</u>, independentemente de eu dar ou não uma festa.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Vamos analisar se as implicações abaixo são verdadeiras ou falsas.
  - *"Se o sol emite luz, então queijos são laticínios."*

    Proposição <u>verdadeira</u>: premissa e conclusão verdadeiras.
  - *"Se* $2 + 2 = 3$*, então morangos são animais."*

    Proposição <u>verdadeira</u>: premissa e conclusão falsas.
  - *"Se a semana tem 7 dias, então o Brasil fica na Europa."*

    Proposição <u>falsa</u>: premissa verdadeira e conclusão falsa.
  - *"Se* 9 *é primo, então* 12 *é par."*

    Proposição <u>verdadeira</u>: premissa falsa e conclusão verdadeira.

Proposições condicionais em linguagem natural

- Implicações aparecem na matemática e na linguagem natural em diversas formas.

  A afirmação condicional $p \to q$ pode ser expressa como:

  - *"se p, então q"*
  - *"se p, q"*
  - *"q se p"*
  - *"q quando p"*
  - *"p é suficiente para q"*
  - *"q é necessário para p"*
  - *"p implica q"*
  - *"p somente se q"*
  - *"q sempre que p"*
  - *"q segue de p"*

  (Após fazer exercícios o suficiente, você vai se acostumar com as várias formas da implicação e tudo vai parecer mais natural!)

Proposições condicionais em linguagem natural

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Sejam as proposições:

$$p: \text{ “}\textit{Está fazendo sol.}\text{”}$$
$$q: \text{ “}\textit{Eu vou ao clube.}\text{”}$$

A implicação $p \to q$ pode ser escrita em linguagem natural como:

- *“Se estiver fazendo sol, eu vou ao clube.”*
- *“Estar fazendo sol é condição suficiente para eu ir ao clube.”*
- *“O fato de eu ir ao clube segue do fato de estar fazendo sol.”*
- *“Eu vou ao clube sempre que faz sol.”*
- *“Faz sol somente se eu vou ao clube.”*

Proposições condicionais: Conversa, contrapositiva e inversa

- Dada uma implicação $p \to q$:
  - sua forma **contrapositiva** é a implicação $\neg q \to \neg p$,
  - sua forma **conversa** é a implicação $q \to p$,
  - sua forma **inversa** é a implicação $\neg p \to \neg q$.

Proposições condicionais: Conversa, contrapositiva e inversa

- $\boxed{\text{Exemplo 14}}$ Seja a proposição

"Bruno vai bem na prova sempre que estuda com afinco."

Esta implicação pode ser escrita como $p \to q$, em que

p é a proposição *"Bruno estuda com afinco"*, e

q é a proposição *"Bruno vai bem na prova"*.

  - A contrapositiva $\neg q \to \neg p$ é a proposição

    "Se Bruno não foi bem na prova, então ele não estudou com afinco."

  - A conversa $q \to p$ é a proposição

    "Se Bruno foi bem na prova, ele estudou com afinco."

  - A inversa $\neg p \to \neg q$ é a proposição

    "Se Bruno não estudou com afinco, ele não foi bem na prova."

Conectivos lógicos: Proposições bicondicionais

- Sejam p e q proposições.

  A **afirmação bicondicional** ou **implicação dupla** $p \leftrightarrow q$ é a afirmação

  "p se, e somente se, q".

  A afirmação bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando p e q têm o mesmo valor de verdade, e é falsa em caso contrário.

- Em linguagem natural é comum expressar $p \leftrightarrow q$ como:
  - *"p é necessário e suficiente para q."*
  - *"p sse q."* Note que usamos <u>"sse" com dois "s"</u>.

    (Em inglês, usa-se o <u>"iff" com dois "f"</u>.)

Conectivos lógicos: Proposições bicondicionais

- Tabela da verdade para a implicação dupla $p \leftrightarrow q$ entre duas proposições p e q:

Implicação dupla

p	**q**	**$\mathbf{p \leftrightarrow q}$**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira sempre que ambos $p \to q$ e $q \to p$ são verdadeiros, e ela é falsa em caso contrário.

Tabela da verdade de proposições compostas

- Nós introduzimos a negação e os conectivos lógicos de disjunção, conjunção, ou exclusivo, implicação e implicação dupla.
- Nós podemos usar estes operadores para expressar proposições cada vez mais complexas.
- Para determinar o valor de verdade de proposições compostas, podemos usar **tabelas da verdade**.

Exemplo 15 Tabela da verdade para a expressão $(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$:

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\neg\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$	$(\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}) \to (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F