DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.1

# Informações Gerais Sobre o Curso
# Introdução ao Curso

Área de Teoria DCC/UFMG

# O professor

- **Haniel Barbosa**

  hbarbosa@dcc.ufmg.br http://hanielbarbosa.com/

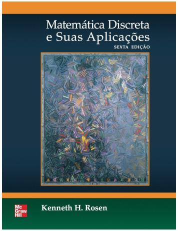
- Formação:
  - 2017: Doutorado em Ciência da Computação (Université de Lorraine, França)
  - 2012: Mestrado em Ciência da Computação (UFRN)
  - 2010: Bacharelado em Ciência da Computação (UFRN)

- Experiência profissional:
  - 2019-...: Professor adjunto (UFMG)
  - 2017-2019: Professor substituto (University of Iowa, EUA)
  - 2017-2019: Pesquisador pós-doutor (University of Iowa, EUA)
  - 2013: Professor substituto (UFRN)
  - 2012: Estágio (Clearsy, França)
  - 2010: Estágio (AeS - Acesso e Segurança, Brasil)

- Interesses de pesquisa:
  - automatização de raciocínio lógico,
  - satisfatibilidade módulo teorias,
  - verificação formal,
  - assistentes de demontração

# Bibliografia

- **Livro-texto:**
  - Matemática Discreta e Suas Aplicações (6ª Edição)
    Kenneth H. Rosen - McGraw Hill (2009)




- **Bibliografia complementar:**
  - Materiais no site do curso
  - How to Prove It: A Structured Approach ($2^{nd}$ Edition)
    Daneiel J. Velleman. Cambridge University Press.

# Métodos de avaliação

- Atividades:
  - **3 Provas**: 90% da nota final.
  - **Listas de exercícios**: 10% da nota final.
    (Haverá cerca de 10 listas de exercícios, aproximadamente 1 a cada semana e meia. Mantenha-se em dia com suas atividades!)

- Haverá uma **prova substitutiva** que:
  - substitui uma *prova perdida* durante o semestre,
  - ocorre ao final do semestre, e
  - cobre toda a matéria lecionada no curso.

- Estudantes com nota final maior ou igual a 40 e menor do que 60 tem direito a fazer o **exame especial**
  - Se nota 60 ou maior, aprovado com 60

# Comunicação e monitoria

- Para material didático, exercícios, e calendários, acesse:

  `https://hanielb.github.io/2025.1-ilc/`

  e também o Moodle da disciplina:

  `https://virtual.ufmg.br/20251/course/view.php?id=11695`

  - Grupos de discussões e avisos urgentes (como eventuais cancelamentos de aula de última hora) também ocorrem no Moodle da disciplina.
  - Quem tiver problemas de acesso deve se dirigir ao LCC.

- E-mails sobre a disciplina devem iniciar o campo "assunto" / "*subject*" com o indicativo **[ILC]** para facilitar a organização das mensagens.

# Objetivos e Programa da Disciplina

# ILC: Objetivos

*"A lógica é o método de raciocinar de maneira estruturalmente válida."*

- Ao final deste curso, espera-se que vocês possam responder com propriedade as seguintes perguntas:
  1. O que é a **lógica proposicional**, e como aplicá-la a problemas reais?
  2. O que é a **lógica de predicados**, e como aplicá-la a problemas reais?
  3. A partir de um conjunto de hipóteses, como realizar apenas **deduções válidas**?
  4. Como **demonstrar formalmente a validade** de uma proposição matemática?
  5. O que é o **conceito de recursão**, e como aplicá-lo a problemas reais?
  6. Como a **lógica Booleana** é aplicada à base dos **circuitos digitais** que compõem os **computadores modernos**?

# ILC: Programma

1. **Fundamentos das lógicas proposicional e de predicados.**
   a) Conectivos lógicos (conjunção, disjunções inclusiva e exclusiva, negação, implicação, implicação dupla).
   b) Tabelas da verdade.
   c) Satisfatibilidade, tautologias, contradições.
   d) Consequência lógica, equivalência lógica.
   e) Predicados, quantificadores, e proposições quantificadas.
   f) Regras de inferência.
   g) Expressividade das lógicas proposicional e de predicados.

# ILC: Programa

2. **Métodos de demonstração.**
   a) Demonstração direta, por contra-exemplo e por divisão em casos.
   b) Demonstração por contradição e por implicação contra-positiva.
   c) Demonstrações construtivas e não-construtivas.
   d) Automatização de demonstrações
3. **Teoria de conjuntos e funções.**
   a) Conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais.
   b) Teoria de conjuntos elementar.
   c) Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas.
   d) Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis.

# ILC: Programa

4. **Indução e recursão.**

   a) Indução matemática fraca e forte.
   b) Princípio da boa ordenação.
   c) Relações de recorrência e recursão.
   d) Indução estrutural.

5. **Fundamentos de álgebra Booleana e circuitos digitais combinatórios.**

   a) Álgebra Booleana e aritmética binária (incluindo leis de De Morgan e representação em complemento de dois).
   b) Portas lógicas.
   c) Formas normais conjuntiva e disjuntiva.
   d) Minimização de circuitos.
   e) Completude de operadores.

# Apêndice - Um exemplo de uso de lógica: Definindo números

# O papel da lógica na definição de números

- Começamos com uma motivação natural para a lógica: definir os números.
- Definir números rigorosamente é essencial.

  Computadores, por exemplo, manipulam números o tempo todo, seguindo instruções.

  Tudo precisa ser rigorosamente definido para computadores funcionarem bem.
- Porém, quando os matemáticos tentaram definir rigorosamente o conceito de "número", muitas dificuldades surgiram.
  1. Como conseguir uma definição finita para um conjunto infinito (como o conjunto dos números naturais, ou o dos números reais)?
  2. Como demonstrar que sua definição está correta: que nenhum número "errado" está incluído nela, e que nenhum número "certo" está excluído?
- Para resolver estas dificuldades, muitas técnicas lógicas foram aprimoradas.

# O papel da lógica na definição de números

- Aqui definiremos conjuntos de números importantes:
  - os números naturais $\mathbb{N}$,
  - os números inteiros $\mathbb{Z}$,
  - os números racionais $\mathbb{Q}$,
  - os números irracionais $\mathbb{I}$, e
  - os números reais $\mathbb{R}$.
- Para isto, vamos usar vários conceitos que veremos com cuidado neste curso:
  - conectivos lógicos para definir conjuntos,
  - definições recursivas,
  - uso de bases diferentes (decimal, binária) para representar números,
  - como representar somas com infinitos termos (somatórios), e
  - como demonstrar a veracidade de uma afirmação matemática.

# Os números naturais

- O conjunto dos **números naturais** é o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

# Os números naturais

- O conjunto dos **números naturais** é o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

  Alguns autores não consideram o número 0 (zero) como um número natural, definindo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

- O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ pode ser definido através de duas "observações auto-evidentes":

  $\mathrm{N}_1$: 0 (zero) é um número natural, e

  $\mathrm{N}_2$: cada número natural tem um sucessor.

# Os números naturais

- Reescrevendo estas “observações auto-evidentes” de maneira mais formal, obtemos os seguintes **axiomas** para os naturais:

  $\mathrm{N_1}$': $0 \in \mathbb{N}$, e

  $\mathrm{N_2}$': se $k \in \mathbb{N}$, então $s(k) \in \mathbb{N}$,

  onde $s(\cdot)$ é a **função sucessor**: $s(k) = k + 1$.

- Exemplos:

  1. $0 \in \mathbb{N}$, por causa de $(\mathrm{N}_1')$.
  2. $s(0) \in \mathbb{N}$, por causa de $(\mathrm{N}_2')$. Notação: $s(0) = 1$.
  3. $s(s(s(s(s(0))))) = 5 \in \mathbb{N}$.

- Para obter-se o número natural $n$, aplica-se $(\mathrm{N}_1')$ uma vez, e depois aplica-se $(\mathrm{N}_2')$ $n$ vezes.

# Números naturais na representação decimal e binária

- Números naturais podem ser escritos em função de potências de 10.

# Números naturais na representação decimal e binária

- Números naturais podem ser escritos em função de potências de 10.
- Exemplo 1

$$237 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

# Números naturais na representação decimal e binária

- Números naturais podem ser escritos em função de potências de 10.
- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$

$$237 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

- Entretanto, não há nada de especial na escolha de potências de 10 para decompor os números naturais.

  Podemos representar os números naturais em potências de 2, por exemplo.

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$

$$\begin{aligned} 11101101_2 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 237 \end{aligned}$$

# Os números inteiros

- O conjunto dos **números inteiros** é o conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

  O conjunto

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

  é o conjunto dos **números inteiros positivos**.

- O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ pode ser definido como sendo o conjunto de todos os números naturais e seus negativos:

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \quad \text{ou} \quad -x \in \mathbb{N}\}.$$

# Os números reais

- Outro conjunto importante é o conjunto dos **números reais** $\mathbb{R}$.

- Exemplos:

  1. $\pi = 3.14159265359\ldots$
  2. $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$
  3. $2$
  4. $-4.5$

- Um **número real** pode ser definido como uma soma ponderada infinita de potências de 10:

$$d_k \quad d_{k-1} \quad \cdots \quad d_1 \quad d_0 \quad . \quad d_{-1} \quad d_{-2} \quad d_{-3} \quad \cdots \quad = \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \cdot 10^i$$

# Os números reais

- Outro conjunto importante é o conjunto dos **números reais** $\mathbb{R}$.

- Exemplos:

  1. $\pi = 3.14159265359\ldots$
  2. $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$
  3. $2$
  4. $-4.5$

- Um **número real** pode ser definido como uma soma ponderada infinita de potências de 10:

$$d_k \quad d_{k-1} \quad \cdots \quad d_1 \quad d_0 \quad . \quad d_{-1} \quad d_{-2} \quad d_{-3} \quad \cdots \quad = \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \cdot 10^i$$

$\boxed{\text{Exemplo 3}}$

$$\begin{aligned} \pi &= 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + \ldots \\ &= 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 + 0.0005 + \ldots \end{aligned}$$

# Os números racionais

- O próximo conjunto de interesse é o dos **números racionais** $\mathbb{Q}$.
- Um número **racional** é um numero real $x$ tal que existam $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, tais que
$$x = \frac{p}{q}.$$
Note sempre podemos usar a **representação simplificada** de racional, em que $\text{mdc}(p, q) = 1$.
- Exemplos:
  1. $\frac{17}{34} = \frac{-9}{-18} = \frac{1}{2} = 0.5$
  2. $\frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} = -0.333333\ldots$
- **Teorema.** Um número real é racional se, e somente se, há periodicidade na sua representação decimal.

  Exemplos:
  1. $1/5 = 0.2\,000\,000\,000\,\ldots$
  2. $1/7 = 0.\,142857\,142857\ldots$

# Os números irracionais

- O conjunto dos **números irracionais** são os números reais não-racionais:

$$\mathbb{I} \quad = \quad \mathbb{R} - \mathbb{Q} \quad = \quad \{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \notin \mathbb{Q}\}$$

- O seguinte resultado mostra que existe pelo menos um número irracional.
- **Teorema.** $\sqrt{2}$ não é racional.

# Os números irracionais

- O conjunto dos **números irracionais** são os números reais não-racionais:

$$\mathbb{I} \quad = \quad \mathbb{R} - \mathbb{Q} \quad = \quad \{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \notin \mathbb{Q}\}$$

- O seguinte resultado mostra que existe pelo menos um número irracional.

- **Teorema.** $\sqrt{2}$ não é racional.

  **Demonstração.**

  Por contradição: Suponha que $\sqrt{2}$ é racional.

# Os números irracionais

- O conjunto dos **números irracionais** são os números reais não-racionais:

$$\mathbb{I} \quad = \quad \mathbb{R} - \mathbb{Q} \quad = \quad \{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \notin \mathbb{Q}\}$$

- O seguinte resultado mostra que existe pelo menos um número irracional.

- **Teorema.** $\sqrt{2}$ não é racional.

  **Demonstração.**

  Por contradição: Suponha que $\sqrt{2}$ é racional.

  Neste caso, sabemos que existem números $p, q \in \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$.

# Os números irracionais

- O conjunto dos **números irracionais** são os números reais não-racionais:

$$\mathbb{I} \quad = \quad \mathbb{R} - \mathbb{Q} \quad = \quad \{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \notin \mathbb{Q}\}$$

- O seguinte resultado mostra que existe pelo menos um número irracional.

- **Teorema.** $\sqrt{2}$ não é racional.

  **Demonstração.**

  Por contradição: Suponha que $\sqrt{2}$ é racional.

  Neste caso, sabemos que existem números $p, q \in \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$.

  Elevando os dois lados da equação acima ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$.

# Os números irracionais

- **Demonstração (Continuação).**

  Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima $p^2$ também tem que ser par. Isto implica que $p$ deve ser par.

# Os números irracionais

- **Demonstração (Continuação).**

  Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima $p^2$ também tem que ser par. Isto implica que $p$ deve ser par.

  Agora, já que $p$ é par, existe algum $r \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2r$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, o que resulta em $q^2 = 2r^2$. Note que então $q^2$ é par, portanto $q$ deve ser par.

# Os números irracionais

- **Demonstração (Continuação).**

  Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima $p^2$ também tem que ser par. Isto implica que $p$ deve ser par.

  Agora, já que $p$ é par, existe algum $r \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2r$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, o que resulta em $q^2 = 2r^2$. Note que então $q^2$ é par, portanto $q$ deve ser par.

  Mas se ambos $p$ e $q$ são pares, isto contradiz a suposição de que o $mdc(p, q) = 1$: encontramos uma contradição.

  Conclusão: não existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$, portanto $\sqrt{2}$ não é racional.

  $\square$

# Observações sobre os números racionais e irracionais

- Alguns fatos interessantes sobre racionais e irracionais:
  a) O conjunto dos números reais é a união dos racionais e irracionais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
  b) Entre dois números racionais quaisquer sempre existe um número irracional.
  c) Entre dois números irracionais quaisquer sempre existe um número racional.
  d) A soma de dois números racionais é sempre um número racional.
  e) A soma de um racional e um irracional é sempre um número irracional.
  f) A soma de dois números irracionais é mais complicada: não se sabe se o número $\pi + e$, onde $e$ é a constante de Euler, é racional ou irracional!

# Uma última questão "complicada"

- Vamos fechar com uma questão mais "complicada" sobre os números.

  A seguinte afirmação é verdadeira ou é falsa?

  > *"O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros é "maior" que o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais."*

# Uma última questão "complicada"

- Vamos fechar com uma questão mais "complicada" sobre os números.

  A seguinte afirmação é verdadeira ou é falsa?

  > *"O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros é "maior" que o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais."*

  Há duas possibilidades:

  - Se a afirmação for <u>verdadeira</u>, então existe um infinito "maior" que o outro!
  - Mas se ela for <u>falsa</u>, então é possível um conjunto ter o mesmo "tamanho" que de um de seus subconjuntos próprios (ou seja, $\mathbb{Z}$ ter o mesmo "tamanho" que seu subconjunto próprio $\mathbb{N}$)!

  Dilemas como este, em que nossa intuição não é de muita ajuda, dependem de métodos lógicos cuidadosos para serem resolvidos.