DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2024.1

Estruturas Básicas: Conjuntos

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

Estruturas Básicas: Introdução

- Aqui vamos estudar algumas estruturas básicas da matemática discreta:
  - conjuntos,
  - funções,
  - sequências.

Conjuntos

Conjuntos: Introdução

- **Conjuntos** são as estruturas discretas fundamentais sobre as quais todas as demais estruturas discretas podem ser construídas.

- A **Teoria dos Conjuntos** é capaz de representar toda a Matemática.

  Conceitos básicos como conjunto, pertinência de elementos a um conjunto, o conjunto vazio, operações sobre conjuntos (união, interseção, complemento, ...) podem capturar conceitos como aritmética, lógica, etc.

- Os conceitos que estudaremos aqui são essenciais para diversas áreas, incluindo algumas que estudaremos neste curso:

  - funções,
  - sequências,
  - análise combinatória,
  - relações.

Conjuntos

- Um **conjunto** é uma coleção não-ordenada de objetos bem definidos, denominados **elementos** ou **membros** do conjunto.

  Escrevemos
  $$a \in A$$
  para denotar que o elemento a pertence ao conjunto A.

  Escrevemos
  $$a \notin A$$
  para denotar que o elemento a não pertence ao conjunto A.

- Usamos normalmente letras maiúsculas para denotar conjuntos, e minúsculas para denotar elementos destes conjuntos.

Formas de se definir um conjunto

- Listar seus elementos entre chaves:

  1. $A = \{\texttt{Ana}, \texttt{Bia}, \texttt{Carlos}\}$
  2. $B = \{a, e, i, o, u\}$
  3. $C = \{\texttt{Júpiter}, 2, \pi, \texttt{Ana}\}$
  4. $D = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

- Especificar uma propriedade que define um conjunto:

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

  significa que o conjunto S consiste em todos os elementos x que tornem o predicado $P(x)$ verdadeiro.

  1. $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$
  2. $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x > 431\}$
  3. $G = \{x \mid \text{a pessoa } x \text{ mora no Brasil}\}$

Formas de se definir um conjunto

- Usar uma definição indutiva:

  1. O conjunto

$$H = \begin{cases} 1 \in H, \\ \text{se } x \in H \text{ e } x + 2 \leq 10, \text{ então } x + 2 \in H. \end{cases}$$

  é o conjunto

$$H = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

  (Vamos estudar definições indutivas com muito mais cuidado mais à frente neste curso.)

Formas de se definir um conjunto

- Especificar uma função característica, que retorna 1 para todo elemento que pertence ao conjunto e 0 em caso contrário:

  1. A função característica

  $$\mu_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{N} \text{ é primo,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

  define o conjunto dos números naturais primos.

- Nem sempre é possível utilizar todos os tipos de definição:

  1. Não é possível definir o conjunto

  $$J = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

  listando todos os seus elementos.

Alguns conjuntos importantes

- Alguns conjuntos importantes são:
  1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ é o conjunto dos **números naturais**.
  2. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ é o conjunto dos **números inteiros**.
  3. $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$ é o conjunto dos **números inteiros positivos**.
  4. $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, \text{ e } q \neq 0\}$ é o conjunto dos **números racionais**.
  5. $\mathbb{R}$ é o conjunto dos **números reais**.
  6. $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos **números reais positivos**.
  7. $\mathbb{C}$ é o conjunto dos **números complexos**.

Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos são **iguais** sse eles possuem os mesmos elementos.

  Formalmente, para todos os conjuntos A e B,

$$A = B \quad \equiv \quad \forall x. (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

- A definição de igualdade de conjuntos implica que:
  - A ordem na qual os elementos são listados é irrelevante:
    1. $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{c, a, d, b\}$
  - Elementos podem aparecer mais de uma vez no conjunto:
    1. $\{a, a, a, a, b, b, b, c, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

Subconjuntos

- Um conjunto A é chamado **subconjunto** de um conjunto B sse cada elemento de A também é um elemento de B.

  Usamos $A \subseteq B$ para denotar que A é subconjunto de B.

  Formalmente:

$$A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x. (x \in A \ \rightarrow \ x \in B).$$

- As frases "A **está contido** em B" e "B **contém** A" são formas alternativas de dizer que A é um subconjunto de B.

  1. O conjunto dos naturais é um subconjunto dos inteiros.
  2. O conjunto de brasileiros é um subconjunto do conjunto de brasileiros. (Nada impede que um conjunto seja um subconjunto de si próprio!)
  3. O conjunto dos números complexos não é um subconjunto dos números reais.

Subconjuntos próprios

- Um conjunto A é **subconjunto próprio** de um conjunto B sse cada elemento de A está em B e existe pelo menos um elemento de B que não está em A.

  Formalmente:

$$\begin{aligned} A \subset B \quad & \equiv \quad \forall x.\, (x \in A \;\rightarrow\; x \in B) \quad \wedge \quad \exists x.\, (x \in B \;\wedge\; x \notin A) \\ & \equiv \quad A \subseteq B \quad \wedge \quad A \neq B. \end{aligned}$$

1. O conjunto dos naturais é um subconjunto próprio do conjunto dos inteiros.
2. O conjunto dos brasileiros não é um subconjunto próprio dos brasileiros.

Diagramas de Venn

- Se os conjuntos A e B forem representados por regiões no plano, relações entre A e B podem ser representadas por desenhos chamados de **Diagramas de Venn**.
- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ $A \subseteq B$.
- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ $A \not\subseteq B$.

O conjunto vazio

- O **conjunto vazio** ou **conjunto nulo** não contém elementos.

  Denotamos o conjunto vazio por $\{\}$ ou $\emptyset$.

- Note que $\{\emptyset\}$ não denota o conjunto vazio, mas o conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio.

- **Teorema**: O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

  Demonstração. Seja A um conjunto qualquer. Queremos mostrar que $\emptyset \subseteq A$, o que equivale a mostrar que

  $$\forall x. \left(x \in \emptyset \ \rightarrow \ x \in A\right) .$$

  Mas a condicional universal acima é verdade por vacuidade, já que a premissa da implicação é sempre falsa.

  Logo $\emptyset \subseteq A$. $\square$

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.
  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: <u>Falso:</u> $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: <u>Falso:</u> $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: <u>Falso:</u> $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.
  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.
  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: <u>Falso:</u> $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: <u>Falso:</u> $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.

  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.
  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: <u>Falso:</u> $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.
  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.
  f) $42 \in \mathbb{N}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: <u>Falso:</u> $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.

  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  f) $42 \in \mathbb{N}$: <u>Verdadeiro:</u> 42 é um elemento de $\mathbb{N}$.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.

  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de $\mathbb{N}$.

  g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.
  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: <u>Falso:</u> $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.
  f) $42 \in \mathbb{N}$: <u>Verdadeiro:</u> 42 é um elemento de $\mathbb{N}$.
  g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: <u>Falso:</u> o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto $\mathbb{N}$.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.

  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de $\mathbb{N}$.

  g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto $\mathbb{N}$.

  h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: <u>Falso:</u> $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.

  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  f) $42 \in \mathbb{N}$: <u>Verdadeiro:</u> 42 é um elemento de $\mathbb{N}$.

  g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: <u>Falso:</u> o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto $\mathbb{N}$.

  h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$: <u>Verdadeiro:</u> o conjunto $\mathbb{N}$ é um elemento de $\{\mathbb{N}\}$.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: <u>Falso:</u> $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.

  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: <u>Verdadeiro:</u> $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  f) $42 \in \mathbb{N}$: <u>Verdadeiro:</u> 42 é um elemento de $\mathbb{N}$.

  g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: <u>Falso:</u> o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto $\mathbb{N}$.

  h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$: <u>Verdadeiro:</u> o conjunto $\mathbb{N}$ é um elemento de $\{\mathbb{N}\}$.

  i) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.

  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de $\mathbb{N}$.

  g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto $\mathbb{N}$.

  h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$: Verdadeiro: o conjunto $\mathbb{N}$ é um elemento de $\{\mathbb{N}\}$.

  i) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$: Falso: o conjunto $\mathbb{N}$ não é um elemento de $\mathbb{Z}$.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.

  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de $\mathbb{N}$.

  g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto $\mathbb{N}$.

  h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$: Verdadeiro: o conjunto $\mathbb{N}$ é um elemento de $\{\mathbb{N}\}$.

  i) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$: Falso: o conjunto $\mathbb{N}$ não é um elemento de $\mathbb{Z}$.

  j) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.

  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

  f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de $\mathbb{N}$.

  g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto $\mathbb{N}$.

  h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$: Verdadeiro: o conjunto $\mathbb{N}$ é um elemento de $\{\mathbb{N}\}$.

  i) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$: Falso: o conjunto $\mathbb{N}$ não é um elemento de $\mathbb{Z}$.

  j) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$: Verdadeiro: o conjunto $\mathbb{N}$ é um suconjunto de $\mathbb{Z}$.

Conjunto potência

- Dado um conjunto A, o **conjunto potência de** A é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

  Denotamos por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto potência de A.

- Exemplos:

  1. Dado o conjunto $S = \{x, y, z\}$, seu conjunto potência é

  $$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}.$$

  2. Dado o conjunto vazio $\emptyset$, seu conjunto potência é

  $$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

  3. Dado o conjunto $\{\emptyset\}$, seu conjunto potência é

  $$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Conjunto potência

- **Teorema:** Se um conjunto finito A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

  Demonstração. Para formar um subconjunto S qualquer de A, podemos percorrer cada elemento $a_i \in A$ $(1 \leq i \leq n)$, decidindo se $a_i \in S$ ou se $a_i \notin S$.

  Como para cada elemento há duas opções (pertence ou não pertence), e há um total de n elementos em A, há 2^n maneiras de se formar um subconjunto S de A.

  Logo, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. $\square$

Tuplas ordenadas

- Uma n-**tupla ordenada** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma coleção ordenada de n elementos, em que a_1 é o primeiro elemento, a_2 é o segundo elemento, ..., e a_n é o n-ésimo elemento.
- Algumas n-tuplas ordenadas recebem nomes especiais:
  - Uma 2-tupla ordenada é chamada de **par ordenado**.
  - Uma 3-tupla ordenada é chamada de **tripla ordenada**.
  - Uma 4-tupla ordenada é chamada de **quádrupla ordenada**.
  - ...
- Duas n-tuplas ordenadas (x_1, x_2, ..., x_n) e (y_1, y_2, ..., y_n) são **iguais** sse

$$x_i = y_i, \quad \text{para } i = 1, \ldots n.$$

Produto Cartesiano

- Sejam A e B conjuntos. O **produto cartesiano** de A e B, denotado $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$.

  Formalmente:
  $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

  $$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

  $$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

  $$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

  Note, em geral, que $A \times B \neq B \times A$.

Produto Cartesiano

- Produtos cartesianos podem ser generalizados para mais de dois conjuntos.
- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos.

  O **produto cartesiano** de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado

  $$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

  é o conjunto de todas n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_i \in A_i$ para $i = 1 \ldots n$.

  Formalmente:

  $$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1 \ldots n\}$$

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{\gamma, \delta\}$.

  $$\begin{aligned} A \times B \times C = \{&(0, a, \gamma), (0, a, \delta), (0, b, \gamma), (0, b, \delta), \\ &(1, a, \gamma), (1, a, \delta), (1, b, \gamma), (1, b, \delta)\} \end{aligned}$$

O tamanho de conjuntos finitos

- Seja A um conjunto finito contendo exatamente n elementos distintos.

  Dizemos que a **cardinalidade** (ou **tamanho**) de A é n.

  A notação $|A| = n$ indica que o tamanho de A é n elementos.

- Estudaremos a cardinalidade de conjuntos infinitos mais adiante.

Operações em conjuntos

Operações em conjuntos: Introdução

- Dois ou mais conjuntos podem ser combinados de diferentes maneiras.

  Por exemplo, dados o conjunto de estudantes de Lógica Computacional e o conjunto de pessoas nascidas em Minas Gerais, podemos definir:

  1. o conjunto de mineiros que estudam Lógica Computacional,
  2. o conjunto de pessoas que são mineiras ou estudam Lógica Computacional,
  3. o conjunto de estudantes de Lógica Computacional que não são mineiros,
  4. ...

- Aqui estudaremos **operações em conjuntos** que permitem a criação de conjuntos mais complexos a partir de conjuntos mais simples.

Operações em conjuntos

- Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo U:

União:	$A \cup B$	$= \quad \{x \in U \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$
Alternativamente:	$x \in A \cup B$	$\leftrightarrow \quad x \in A \ \vee \ x \in B$
Notação:	$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	$= \quad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
Interseção:	$A \cap B$	$= \quad \{x \in U \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$
Alternativamente:	$x \in A \cap B$	$\leftrightarrow \quad x \in A \ \wedge \ x \in B$
Notação:	$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$	$= \quad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$
Diferença:	$A - B$	$= \quad \{x \in U \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$
Alternativamente:	$x \in A - B$	$\leftrightarrow \quad x \in A \ \wedge \ x \notin B$
Complemento:	$\overline{A}$	$= \quad \{x \in U \mid x \notin A\}$
Alternativamente:	$x \in \overline{A}$	$\leftrightarrow \quad x \notin A$

Operações em conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 5, 6\}$.
  Considere como conjunto universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
  - $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $A \cap B = \{1, 5\}$
  - $A - B = \{3, 4\}$
  - $B - A = \{2, 6\}$
  - $\overline{A} = \{0, 2, 6, 7\}$
  - $\overline{B} = \{0, 3, 4, 7\}$

Operações em conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Considere uma família de conjuntos definida como

$$A_i = \{0, 1, 2, \ldots, i\}$$

para $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Determine:

a) $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

b) $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

Operações em conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Considere uma família de conjuntos definida como

$$A_i = \{0, 1, 2, \ldots, i\}$$

para $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Determine:

a) $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

b) $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

Solução.

Primeiro, vamos entender quem é cada conjunto A_i com alguns exemplos.

$$\begin{aligned} A_0 &= \{0\} \\ A_1 &= \{0, 1\} \\ A_2 &= \{0, 1, 2\} \\ A_3 &= \{0, 1, 2, 3\} \\ \ldots &= \ldots \\ A_{10} &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \end{aligned}$$

Operações em conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ (Continuação)

Agora podemos verificar o seguinte.

a) $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$

Para ver o porquê, note que $0 \in A_i$ para todo $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, logo o número 0 deve estar na união desejada. Além disso, para qualquer inteiro positivo n temos que $n \in A_n$, logo n também deve estar na união desejada.

Assim temos que a união deseja inclui 0 e todos os inteiros positivos, logo esta união é o próprio conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais.

b) $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{0\}$

Para ver o porquê, note que $0 \in A_i$ para todo $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, logo o número 0 deve estar na interseção desejada. Além disso, para qualquer inteiro positivo n temos que $n \notin A_{n-1}$, logo n não pode estar na interseção desejada.

Assim temos que a interseção desejada inclui 0, mas não inclui nenhum inteiro positivo, logo esta interseção é o conjunto $\{0\}$.

Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, cada elemento de A está em B, e cada elemento de B está em A.
- Uma maneira conveniente de se mostrar que dois conjuntos são iguais é mostrando que cada conjunto é subconjunto do outro.

  Formalmente:

  $$A = B \quad \equiv \quad \forall x.\, (x \in A \;\leftrightarrow\; x \in B).$$

  Teorema: $A = B$ sse $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

  Demonstração. Escrevendo $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ formalmente:

$$\begin{array}{lll}
 & A = B & \\
\equiv & \forall x.\, (x \in A \leftrightarrow x \in B) & \text{(definição de igualdade)} \\
\equiv & \forall x.\, ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) & \text{(definição de } \leftrightarrow\text{)} \\
\equiv & (\forall x.\, (x \in A \rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x.\, (x \in B \rightarrow x \in A)) & \text{(distributividade de } \forall \text{ sobre } \wedge\text{)} \\
\equiv & A \subseteq B \wedge B \subseteq A & \text{(definição de } \subseteq\text{)}
\end{array}$$

$\square$

Igualdade de conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Mostre que $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solução.

- <u>Método 1:</u> Manipulando a definição dos operadores em conjuntos.

  Vamos mostrar que $x \in \overline{(A \cap B)}$ sse $x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$:

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{(A \cap B)} \quad &\leftrightarrow \quad x \notin (A \cap B) && \text{(definição de complemento)} \\
&\leftrightarrow \quad \neg(x \in (A \cap B)) && \text{(definição de } \notin\text{)} \\
&\leftrightarrow \quad \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) && \text{(definição de interseção)} \\
&\leftrightarrow \quad \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) && \text{(de Morgan)} \\
&\leftrightarrow \quad (x \notin A) \vee (x \notin B) && \text{(definição de } \notin\text{)} \\
&\leftrightarrow \quad (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) && \text{(definição de complemento)} \\
&\leftrightarrow \quad x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) && \text{(definição de união)}
\end{aligned}
$$

Igualdade de conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ (Continuação)

  - Método 2: Usando uma **tabela de pertinência**, em que usamos o símbolo 1 para indicar que um elemento pertence a um conjunto, e o símbolo 0 para indicar que ele não pertence.

    A tabela abaixo demonstra que um elemento pertence a $\overline{(A \cap B)}$ (quarta coluna) sse ele pertence a $\overline{A} \cup \overline{B}$ (sexta coluna):

A	B	$A \cap B$	$\overline{(A \cap B)}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Igualdade de conjuntos

- Sejam todos os conjuntos abaixo subconjuntos do conjunto universo U.

Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associatividade	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributividade	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
União e interseção com U	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
Complemento duplo	$\overline{\overline{A}} = A$	
Idempotência	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
De Morgan	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Absorção	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Diferença de conjuntos	$A - B = A \cap \overline{B}$	
União e interseção com $\emptyset$	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
União e interseção com o complemento	$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
Complementos de U e $\emptyset$	$\overline{U} = \emptyset$	$\overline{\emptyset} = U$

Conjuntos disjuntos

- Dois conjuntos são chamados **disjuntos** sse eles não têm nenhum elemento em comum.

  Formalmente:

  $$A \text{ e } B \text{ são disjuntos} \quad \equiv \quad A \cap B = \emptyset.$$

- **Proposição:** Dados dois conjuntos A e B, $(A - B)$ e B são disjuntos.

  Demonstração. Por contradição. Suponha que a afirmação seja falsa, ou seja, que existem conjuntos A e B tais que $(A - B) \cap B \neq \emptyset$. Neste caso existe um elemento x tal que $x \in (A - B) \wedge x \in B$. Note que, em particular, isso significa que $x \in B$.

  Por outro lado, também teremos $x \in (A - B)$, o que, pela definição de diferença, significa que $x \in A \wedge x \notin B$. Em particular, isso implica que $x \notin B$.

  Logo chegamos a uma contradição, uma vez que $x \in B$ e $x \notin B$. Portanto, a proposição deve ser verdadeira. $\square$

Partições de um conjunto

- Os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados **mutuamente disjuntos** (ou **disjuntos par-a-par**, ou **sem sobreposição**) sse $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i, j = 1, 2, \ldots, n$ e $i \neq j$.

- Uma coleção de conjuntos não vazios $\{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\}$ é uma **partição** do conjunto A sse

  (i) $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, e

  (ii) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente disjuntos.

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, algumas partições possíveis são:

  a) $\{\{2, 3, 5\}, \{1, 4\}\}$,

  b) $\{\{1\}, \{2, 4, 5\}, \{3\}\}$,

  c) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$, e

  d) $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ $\mathbb{Z}$ pode ser particionado entre o conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares.

O Paradoxo de Russell e a Teoria de Conjuntos “Ingênua”

O Paradoxo do Barbeiro

- Vimos que um conjunto pode ser especificado através de uma propriedade que define um conjunto, como em $S = \{x \mid P(x)\}$:

  1. $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$
  2. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x > 431\}$

- Entretanto, a propriedade $P(x)$ não pode ser uma propriedade qualquer.

- **Paradoxo do Barbeiro:** *"O barbeiro é alguém que barbeia todos aqueles, e apenas aqueles, homens que não se barbeiam sozinhos."*

  A pergunta é: o barbeiro barbeia a si mesmo?

  Equivalentemente, seja b o barbeiro e seja B o conjunto de todas as pessoas que o barbeiro b barbeia. Então:

  $$b \in B?$$

  Paradoxo: $b \in B \leftrightarrow b \notin B$!

O Paradoxo de Russell e a Teoria de Conjuntos "Ingênua"

- O Paradoxo do Barbeiro é um caso especial do problema identificado por Bertrand Russell:

  Paradoxo de Russell: Se definirmos S como *"o conjunto de todos os conjuntos que não têm a si mesmo como elemento"*, ou seja,

  $$S = \{A \mid A \text{ é um conjunto e } A \notin A\},$$

  como decidir se $S \in S$?

  Paradoxo: $S \in S \leftrightarrow S \notin S$!

- Lições:
  - Teoria de Conjuntos "Ingênua" (*"Naïve set theory"*) não pode ser usada sem cuidado.
  - Para isso existem **abordagens axiomáticas**, como a de Zermelo-Fraenkel (*"ZF Set Theory"*).