DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2024.1

Estruturas Básicas: Funções, Sequências, e Somatórios

Área de Teoria DCC/UFMG

Funções

Funções: Introdução

- Frequentemente temos que atribuir a cada elemento de um conjunto um elemento particular de outro conjunto.

  Por exemplo, podemos:

  1. Atribuir a cada aluno de Introdução à Lógica Computacional uma nota.
  2. Atribuir a cada inteiro seu quadrado.
  3. Atribuir a cada país seu chefe de Estado.

- O conceito de **função** formaliza este tipo de atribuição.

- Em matemática e ciência da computação, funções são fundamentais:

  - na definição de estruturas discretas como **sequências** e **strings**,
  - no estudo de complexidade de algoritmos,
  - na produção de algoritmos recursivos,
  - ...

Funções

- Sejam A e B conjuntos não-vazios.

  Uma **função** f de A para B é uma atribuição de exatamente um elemento de B a cada elemento de A.

  Escrevemos

  $$f(a) = b$$

  se b for o único elemento de B atribuido através de f ao elemento a de A.

Funções

- Se f é uma função de A para B, escrevemos

$$f : A \to B$$

para denotar o **tipo** da função.

O conjunto A é chamado de **domínio** de f.

O conjunto B é chamado de **co-domínio** ou **contra-domínio** de f.

A **imagem** de f é o conjunto de valores que f pode assumir:

$$\text{imagem de } f \ = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in A\}$$

A **imagem inversa** de um elemento $b \in B$ é o conjunto de valores $a \in A$ que são mapeados a b via f:

$$\text{imagem inversa de } b \ = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Funções: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Sejam os conjuntos $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

  Seja a função $f : A \rightarrow B$ definida pelo diagrama abaixo.

- $f(x) = 2$
- $f(y) = 4$
- $f(z) = 2$

- Domínio de f: $\{x, y, z\}$
- Co-domínio de f: $\{1, 2, 3, 4\}$
- Imagem de f: $\{2, 4\}$

- Imagem inversa de 1: $\emptyset$
- Imagem inversa de 2: $\{x, z\}$
- Imagem inversa de 3: $\emptyset$
- Imagem inversa de 4: $\{y\}$

- A função f pode ser representada como o **conjunto de pares ordenados**:

$$f = \{(x, 2), (y, 4), (z, 2)\}$$

Funções: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Outros exemplos de funções:

  - Função quadrado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

  $$f(x) = x^2$$

  - Função sucessor $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

  $$f(n) = n + 1$$

  - Função constante $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$:

  $$f(r) = 2$$

  - Função líder $f : P \to H$, em que P é o conjunto de todos os países, I é o conjunto de indivíduos humanos, e

  $$f(p) = c, \qquad \text{em que } c \text{ é o chefe de Estado do país } p.$$

Igualdade de funções

- Duas funções f e g funções são **iguais** sse elas:
  - têm o mesmo domínio
  - têm o mesmo co-domínio
  - mapeiam cada elemento do domínio ao mesmo elemento do co-domínio.

  Formalmente, para duas funções f e g definidas em $A \to B$:

  $$f = g \qquad \text{sse} \qquad \forall a \in A.\, f(a) = g(a).$$

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Sejam as funções definidas dos reais para os reais não-negativos:

  $$f(x) = |x| \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x^2}.$$

  Então $f = g$, pois para todo $x \in \mathbb{R}$:

  $$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Função injetiva

- Uma função $f : A \to B$ é uma **função injetiva** (ou **injetora** ou **um-para-um**) sse para todos $a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \neq a_2 \quad \to \quad f(a_1) \neq f(a_2)$$

ou, equivalentemente,

$$f(a_1) = f(a_2) \quad \to \quad a_1 = a_2$$

- Intuitivamente, uma função é injetiva se cada elemento do domínio é mapeado em um elemento diferente do co-domínio.

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:

  - $f(x) = x + 1$
    <u>é injetiva</u>;
  - $f(x) = x/10$
    <u>é injetiva</u>;
  - $f(x) = x^2$
    <u>não é injetiva</u>;

Função sobrejetiva

- Uma função $f : A \to B$ é uma **função sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) sse para todo $b \in B$ é possível achar um $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- Intuitivamente, uma função é sobrejetora se cada elemento do co-domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio.
- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:
  - $f(x) = x + 1$ é sobrejetiva;
  - $f(x) = {}^{x}/_{10}$ é sobrejetiva;
  - $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva;

Função bijetiva

- Uma função $f : A \to B$ é uma **função bijetiva** (ou **bijetora**) sse f é injetiva e sobrejetiva.

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:

  - $f(x) = x + 1$ <u>é bijetiva</u>, pois é injetiva e sobrejetiva;

  - $f(x) = {}^{x}/_{10}$ <u>é bijetiva</u>, pois é injetiva e sobrejetiva;

  - $f(x) = 2^x$ <u>não é bijetiva</u> (é injetiva mas não é sobrejetiva);

  - $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ <u>não é bijetiva</u> (é sobrejetiva mas não é injetiva).

Função inversa

- Seja $f : A \to B$ uma função bijetiva.

  A **função inversa** de f é $f^{-1} : B \to A$ tal que

  $$f^{-1}(y) = x \quad \text{sse} \quad y = f(x)$$

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x + 1$ é invertível porque ela é bijetiva. Sua inversa é

  $$f^{-1}(x) = x - 1$$

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ não é invertível porque ela não é bijetiva: $f(2) = f(-2) = 4$, logo $f^{-1}(4)$ não é definido.

Composição de funções

- Sejam $g : A \to B'$ e $f : B \to C$ funções tais que a imagem de g é um subconjunto do domínio de f, i.e., $B' \subseteq B$.

  A **função composta** de f com g, denotada por $f \circ g : A \to C$, é definida para todo $a \in A$ da seguinte forma:

  $$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

  A função $f \circ g$ é chamada de **composição de f e g**.

Composição de funções

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(n) = n + 1 \qquad \text{e} \qquad g(n) = n^2.$$

É verdade que $f \circ g = g \circ f$?

Solução. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos que

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1.$$

porém

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

Logo $f \circ g \neq g \circ f$.

- O exemplo acima mostra que a composição de funções não é comutativa.

Composição com a função identidade

- Dado um domínio A, a **função identidade** $\iota_A : A \to A$ é definida como:

$$\iota_A(a) = a, \quad \text{para todo } a \in A.$$

- **Teorema.** Se f é uma função de X para Y, e ι_X é a função identidade em X e ι_Y é a função identidade em Y, então

$$f \circ \iota_X = f$$
$$\iota_Y \circ f = f$$

Demonstração. Exercício para o(a) estudante!

- **Teorema.** Se $f : X \to Y$ uma função bijetiva com função inversa $f^{-1} : Y \to X$, então

$$f^{-1} \circ f = \iota_X$$
$$f \circ f^{-1} = \iota_Y$$

Demonstração. Exercício para o(a) estudante!

Funções parciais

- Uma **função parcial** f de um conjunto A para um conjunto B atribui a cada elemento a em um subconjunto de A, chamado de **domínio de definição de** f, um único elemento b de B.

  Os conjuntos A e B são chamados de **domínio** e **co-domínio** de f, respectivamente.

  Dizemos que f é **indefinida** para elementos de A que não estão no domínio de definição de f.

  Quando o domínio de definição de f é o próprio domínio A, dizemos que f é uma **função total**.

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ em que $f(n) = \sqrt{n}$ é uma função parcial de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{R}$ em que o domínio da definição é o conjunto dos inteiros não-negativos.

  A função f é indefinida para os inteiros negativos.

Sequências

Sequências: Introdução

- **Sequências** são listas ordenadas de elementos.
- Sequências são estruturas discretas que aparecem com frequência em ciência da computação:
  1. progressão aritmética,
  2. progressão geométrica,
  3. strings,
  4. ...
- Nesta seção vamos estudar como definir sequências, e como encontrar regras para geração de sequências.

Sequências

- Uma sequência é uma estrutura utilizada para representar uma lista ordenada.

  Formalmente, uma **sequência** é uma função definida de um subconjunto dos inteiros para um conjunto arbitrário S.

  Normalmente o domínio de uma sequência são os naturais ou os inteiros positivos, mas qualquer subconjunto dos inteiros pode ser usado como domínio.

- Usamos a_n para denotar a imagem do inteiro n.

  Cada a_n é chamado de um **termo** da sequência.

  A sequência como um todo é frequentemente denotada como $\{a_n\}$.

- Exemplos:

  1. A sequência (infinita) dos números primos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$
  2. A sequência (infinita) de $1/n$, para n inteiro positivo: $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \ldots$
  3. A sequência (finita) de dias da semana: domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado.

Sequências importantes

- Uma **progressão aritmética** é uma sequência da forma

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad \dots \quad , \quad a+nd, \quad \dots$$

em que o **termo inicial** a e a **diferença comum** d são números reais.

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$ A sequência $\{a_n\}$ com

$$a_n = -1 + 4n$$

é uma progressão aritmética com:

  - termo inicial: -1
  - diferença comum: 4

Seus termos iniciais $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ são:

$$-1, \quad 3, \quad 7, \quad 11, \quad 15, \quad 19, \quad \dots$$

Sequências importantes

- Uma **progressão geométrica** é uma sequência da forma

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \quad \ldots \quad , \quad ar^n, \quad \ldots$$

  em que o **termo inicial** a e a **razão** r são números reais.

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ A sequência $\{g_n\}$ com

$$g_n = 6 \cdot (1/3)^n$$

  é uma progressão geométrica com:

  - termo inicial: 6
  - razão: $1/3$

  Seus termos iniciais $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, \ldots$ são:

$$6, \quad 2, \quad 2/3, \quad 2/9, \quad 2/27, \quad 2/81, \quad \ldots$$

Fórmulas explícitas para sequências

- Uma **fórmula explícita** define como obter o *n*-ésimo termo de uma sequência diretamente em função de *n*.

  Uma mesma sequência pode ser definida por mais de uma fórmula explícita.

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ A sequência

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \ldots \quad , \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \ldots$$

  pode ser definida como uma função dos naturais para os reais:

$$0 \mapsto 1 \qquad 1 \mapsto -\frac{1}{2} \qquad 2 \mapsto \frac{1}{3} \qquad 3 \mapsto -\frac{1}{4} \qquad \ldots \qquad n \mapsto \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad \ldots$$

  Formalmente, a sequêcia pode ser descrita por $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, em que

$$f(n) = \frac{(-1)^n}{n+1}, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ (Continuação)

  A mesma sequência pode ser definida como uma função função dos inteiros positivos para os reais:

  $$1 \mapsto 1 \qquad 2 \mapsto -\frac{1}{2} \qquad 3 \mapsto \frac{1}{3} \qquad 4 \mapsto -\frac{1}{4} \qquad \dots \qquad n \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \dots$$

  Formalmente, a sequêcia pode ser descrita por $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, em que

  $$g(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Definindo uma sequência a partir de seus termos

- Um problema comum é, dados alguns termos iniciais de uma sequência, determinar uma regra para para gerar a sequência como um todo.
- Maneiras típicas de se definir uma sequência são:
  - Prover <u>uma fórmula explícita</u> para cada termo da sequência.
  - Prover <u>um algoritmo</u> que gere a sequência.
  - Prover <u>uma fórmula recursiva</u> para cada termo da sequência.
- É importante notar que, dado um número limitado de termos

$$a_1, a_2, \ldots, a_i$$

  de uma sequência, podemos achar uma regra que gere estes termos, mas esta regra é garantida apenas para os termos $a_1, a_2, \ldots, a_i$ apresentados.

  Nada garante que a fórmula ou algoritmo valha para a_{i+1}, ou para a sequência como um todo!

Defininindo uma sequência a partir de seus termos

- $\boxed{\text{Exemplo 14}}$ Seja a sequência cujos 5 primeiros termos são:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5.$$

A fórmula

$$a_n = n, \qquad \text{para } n \geq 1$$

gera estes 5 termos corretamente, e prevê que

$$a_6 = 6.$$

Por outro lado, o algoritmo

"Gere todos os naturais cujo resto da divisão por 10 está entre 1 *e* 5*"*

também gera estes mesmos cinco termos, e prevê que

$$a_6 = 11.$$

As duas descrições concordam para todos os termos dados, mas geram sequências diferentes. <u>Apenas com as informações dadas não há como dizer qual sequência é mais apropriada.</u>

Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ cujos 10 primeiros termos são:

$$1, \quad 7, \quad 25, \quad 79, \quad 241, \quad 727, \quad 2\,185, \quad 6\,559, \quad 19\,681, \quad 59\,047.$$

Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ cujos 10 primeiros termos são:

$$1, \quad 7, \quad 25, \quad 79, \quad 241, \quad 727, \quad 2\,185, \quad 6\,559, \quad 19\,681, \quad 59\,047.$$

Solução.

A seguinte fórmula explícita pode gerar os 10 primeiros termos desta sequência:

$$a_n = 3^n - 2, \quad \text{para inteiros } n \geq 1.$$

Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 16}}$ Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ cujos 10 primeiros termos são:

$$1, \quad -2, \quad 3, \quad -4, \quad 5, \quad -6, \quad 7, \quad -8, \quad 9, \quad -10.$$

Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 16}}$ Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ cujos 10 primeiros termos são:

$$1, \quad -2, \quad 3, \quad -4, \quad 5, \quad -6, \quad 7, \quad -8, \quad 9, \quad -10.$$

Solução.

Esta é uma **sequência alternante**, ou seja, cada termo a_n possui sinal oposto ao do termo a_{n-1}.

A seguinte fórmula explícita pode gerar os 10 primeiros termos desta sequência:

$$a_n = (-1)^{n+1} n, \quad \text{para inteiros } n \geq 1.$$

Provendo uma algoritmo para gerar a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 17}}$ Como produzir os termos de uma sequência cujos 10 primeiros termos são:

$$1, \quad 2, \quad 2, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad 4, \quad 4, \quad 4, \quad 4?$$

Solução.

Uma possível maneira é seguir o algoritmo seguinte:

"Começando de 1, em ordem crescente, cada natural n é repetido n vezes na sequência."

Provendo uma algoritmo para gerar a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 18}}$ Como produzir os termos de uma sequência cujos 16 primeiros termos são:

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0?$$

Provendo uma algoritmo para gerar a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 18}}$ Como produzir os termos de uma sequência cujos 16 primeiros termos são:

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0?$$

Solução.

Uma possível maneira é seguir o algoritmo seguinte:

"Para cada natural $n \geq 1$, em ordem crescente, adicione à sequência n termos 0, seguidos de n termos 1."

<u>Desafio:</u> Você consegue encontrar uma fórmula explícita para esta mesma sequência?

Provendo uma fórmula recursiva para gerar a sequência

- Uma **fórmula recursiva** para uma sequência define cada termo em função de termos anteriores.

  Definições recursivas são baseadas em relações de recorrência.

- Uma **relação de recorrência** para uma sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa a_n em termos de um ou mais termos prévios na sequência (i.e., $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$) para cada $n \geq n_0$, em que n_0 é um inteiro não-negativo.

Provendo uma fórmula recursiva para gerar a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 19}}$ A sequência

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 6, \quad 24, \quad 120, \quad 720, \quad 5\,040, \quad 40\,320, \quad 362\,880, \quad \ldots$$

  pode ser definida pela fórmula explícita

$$a_n = n!, \quad n \geq 0,$$

  ou pela fórmula recursiva

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = n \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

- Por enquanto vamos nos focar em fórmulas explícitas e algoritmos. Fórmulas recursivas serão estudadas em profundidade mais no curso de **Matemática Discreta**.

Função piso e função teto

Funções importantes: Função piso e função teto

- A função **piso** ou **chão** (em inglês, *floor*) atribui a cada número real x o maior número inteiro menor ou igual a ele.

  O valor da função piso é denotado por $\lfloor x \rfloor$.

- A função **teto** (em inglês, *ceiling*) atribui a cada número real x o menor número inteiro maior ou igual a ele.

  O valor da função teto é denotado por $\lceil x \rceil$.

- Tanto a função piso quanto a função teto têm tipo $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

- $\boxed{\text{Exemplo 20}}$:

  - $$\begin{array}{rcl} \lfloor \pi \rfloor & = & 3 \\ \lceil \pi \rceil & = & 4 \end{array}$$
  - $$\begin{array}{rcl} \lfloor -2.7 \rfloor & = & -3 \\ \lceil -2.7 \rceil & = & -2 \end{array}$$
  - $$\begin{array}{rcl} \lfloor 42 \rfloor & = & 42 \\ \lceil 42 \rceil & = & 42 \end{array}$$

Funções importantes: Função piso e função teto

- Algumas propriedades úteis das funções piso e teto:

  1. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
  2. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
  3. $x - 1 \quad < \quad \lfloor x \rfloor \quad \leq \quad x \quad \leq \quad \lceil x \rceil \quad < \quad x + 1$

- Para demonstrar propriedades sobre funções piso e teto, é útil observar que:

$$
\begin{aligned}
x &= \lfloor x \rfloor + \varepsilon && \text{, para algum } 0 \leq \varepsilon < 1, \\
x &= \lceil x \rceil - \varepsilon && \text{, para algum } 0 \leq \varepsilon < 1.
\end{aligned}
$$

Funções importantes: Função piso e função teto

- $\boxed{\text{Exemplo 21}}$ Vamos demonstrar a propriedade de que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

  Demonstração. Vamos representar o número x como $n + \epsilon$, em que $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq \epsilon < 1$.

  Há dois casos a se considerar, dependendo se $\epsilon = 0$ ou não.

  Caso 1: $\epsilon = 0$. Neste caso $x = n$ e $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil = -n$.

  Caso 2: $0 < \epsilon < 1$. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
\lfloor -x \rfloor &= \lfloor -(n+\epsilon) \rfloor && \text{(pois } x = n + \epsilon) \\
&= \lfloor -n - \epsilon \rfloor \\
&= -(n+1) && \text{(pela definição da função piso),}
\end{aligned}$$

  e que

$$\begin{aligned}
-\lceil x \rceil &= -\lceil n + \epsilon \rceil && \text{(pois } x = n + \epsilon) \\
&= -(n+1) && \text{(pela definição da função teto),}
\end{aligned}$$

  de onde concluímos que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

  □

Somatórios e Produtórios

- Muitas vezes estamos interessados na soma ou no produto de todos os termos de uma sequência.

- Seja uma sequência $\{a_k\}$. O **somatório** dos termos

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \ldots, \quad a_n$$

de $\{a_k\}$ é a soma

$$a_m \quad + \quad a_{m+1} \quad + \quad a_{m+2} \quad + \quad \ldots \quad + \quad a_n.$$

Para representação do somatório, usamos o **símbolo de somatório** Σ:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \quad = \quad a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n.$$

Somatórios

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ Seja a sequência $\{a_k\}$ em que $a_k = k^2$.

$$\sum_{k=3}^{6} a_k \quad = \quad 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 \quad = \quad 9 + 16 + 25 + 36 \quad = \quad 86$$

- Uma notação alternativa para somatórios é

$$\sum_{s \in S} f(s),$$

em que S é um conjnto de domínio e f é uma função com domínio S.

- $\boxed{\text{Exemplo 23}}$

$$\sum_{s \in \{0,3,7\}} s^2 \quad = \quad 0^2 + 3^2 + 7^2 \quad = \quad 0 + 9 + 49 \quad = \quad 58.$$

Variáveis ligadas e livres em um somatório

- A **variável ligada** de um somatório é a variável sob a qual os termos do somatório são definidos.

  As demais variáveis são chamadas de **variáveis livres**.

- $\boxed{\text{Exemplo 24}}$ Em

  $$\sum_{i=1}^{n}(i-1)$$

  i é a variável ligada; n é uma variável livre.

- $\boxed{\text{Exemplo 25}}$ Em

  $$\sum_{k=m}^{n} k^2$$

  k é a variável ligada; m e n são variáveis livres.

Mudança de variável em um somatório

- A variável ligada não é relevante:
  trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

- Exemplo 26

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(i+1)}{i} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{(j+1)}{j} \quad = \quad \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{(\alpha+1)}{\alpha}$$

- Variáveis livres são relevantes:
  trocar uma variável livre pode alterar o valor do somatório.

- Exemplo 27 Os somatórios abaixo são distintos, pois se $m \neq n$, eles darão valores diferentes.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(i+1)}{i} \quad \neq \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{(i+1)}{i}$$

Mudança de variável em um somatório

- Dois somatórios são **idênticos** sse eles possuem termos idênticos.
- $\boxed{\text{Exemplo 28}}$

$$\sum_{j=2}^{4}(j-1)^2 \quad = \quad \sum_{k=1}^{3} k^2,$$

pois

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{4}(j-1)^2 \quad &= \quad (2-1)^2+(3-1)^2+(4-1)^2 \\ &= \quad 1^2+2^2+3^2\end{aligned}$$

e

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 \quad = \quad 1^2+2^2+3^2$$

Mudança de variável em um somatório

- $\boxed{\text{Exemplo 29}}$ Substitua $k+1$ na soma abaixo por j:

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1}$$

Passos:

1. Calcule os novos limites do somatório: $\begin{cases} \text{Para } k=0, & j=0+1=1 \\ \text{Para } k=6, & j=6+1=7 \end{cases}$

2. Calcule o termo geral:

   Como $j=k+1$, então $k=j-1$. Logo,

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{(j-1)+1} = \frac{1}{j}$$

A soma pode ser reescrita como

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=1}^{7} \frac{1}{j}.$$

Produtórios

- Seja uma sequência $\{a_k\}$. O **produtório** dos termos

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \ldots, \quad a_n$$

de $\{a_k\}$ é o produto

$$a_m \quad \cdot \quad a_{m+1} \quad \cdot \quad a_{m+2} \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad a_n.$$

Para representação do produtório, usamos o **símbolo de produtório** $\prod$:

$$\prod_{i=m}^{n} a_i \quad = \quad a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

- $\boxed{\text{Exemplo 30}}$ $\quad \prod_{i=1}^{3} i^i \quad = \quad 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \quad = \quad 1 \cdot 4 \cdot 27 \quad = \quad 108$

- As definições de **variável ligada** e **variáveis livres** para somatórios também se aplicam a produtórios.

Propriedades de somatórios e produtórios

- Dadas duas sequências de números reais

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \ldots,$$

$$b_m, \quad b_{m+1}, \quad b_{m+2}, \quad \ldots,$$

  e seja c é um número real qualquer.

  Então as seguintes equações são válidas para qualquer $n \geq m$:

  1. $\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k \quad = \quad \sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k)$
  2. $c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k \quad = \quad \sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k$
  3. $\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) \quad = \quad \prod_{k=m}^{n}(a_k \cdot b_k)$