

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2024.1

Lógica de Predicados

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

Lógica de predicados: Introdução

- A lógica proposicional cobre a análise de proposições compostas (fórmulas), i.e., proposições simples ligadas por conectivos \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow , ...
- Entretanto, a lógica proposicional não é expressiva o suficiente para capturar certas sentenças.
- Por exemplo, suponha que saibamos que
 - 1 *“Todos os matriculados em Introdução à Lógica Computacional são estudantes dedicados”*, e que
 - 2 *“Túrin está matriculado em Introdução à Lógica Computacional”*.

Intuitivamente, podemos, então, concluir que

- 3 *“Túrin é um estudante dedicado.”*

Pare este tipo de inferência precisaremos introduzir os conceitos de predicados e quantificadores.

Predicados

Predicados: Introdução

- Afirmações como as seguintes são comuns em matemática:
 - ① $x \geq 12 \wedge x < 64$,
 - ② $x + y = z$,
 - ③ O aluno x tirou a maior nota da sala na prova.
- Tais afirmações são escritas em termos de variáveis.
- Como em lógica proposicional, para atribuir um valor de verdade a essas sentenças, precisamos valorar as variáveis.
- Mas também precisamos raciocinar além de proposições e conectivos lógicos.
 - Por exemplo, para uma certa valoração \mathcal{V} de x que lhe associa a um aluno, qual o valor de $\llbracket \text{“O aluno } x \text{ tirou a maior nota da sala na prova”} \rrbracket^{\mathcal{V}}$?

Predicados: Introdução

- Exemplo 1 A afirmação

“ x é um número real”

pode ser dividida em duas partes:

- 1 a primeira parte, a **variável** x , é o sujeito da afirmação,
- 2 a segunda parte “é um número real” é um **predicado**, ou seja, uma propriedade que o sujeito da afirmação pode ou não satisfazer.

A afirmação “ x é um número real” pode ter valores de verdade diferentes dependendo do valor que a variável x assumir.

- Quando $x = \pi$, a afirmação “ x é um número real” é verdadeira.
- Quando $x = \sqrt{-2}$, a afirmação “ x é um número real” é falsa.

- Exemplo 1 (Continuação)

Podemos ver esta afirmação como uma **função proposicional**

$$P(x): \text{“}x \text{ é um número real”}$$

que mapeia valores de x para valores de verdade (verdadeiro ou falso):

- $P(\pi) = T$.
- $P(\sqrt{-2}) = F$.



Predicados

- Um **predicado** é uma sentença com um número finito de variáveis cujo valor de verdade pode ser determinado quando as variáveis são substituídas por valores específicos.

Intuitivamente, predicados:

- dão qualidades a sujeitos,
 - relacionam sujeitos entre si, ou
 - relacionam sujeitos a objetos.
- A aridade de predicados depende do número argumentos que ele toma.

Um predicado

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

de n argumentos é chamado de um **predicado n-ário**.

Predicados

- Exemplo 2 Seja $P(x)$ o predicado unário " $x \geq 10$ ".
 - $P(15) = T$,
pois substituindo x por 15 em " $x \geq 10$ ", obtemos uma afirmação verdadeira.
 - $P(\pi) = F$,
pois substituindo x por π em " $x \geq 10$ ", obtemos uma afirmação falsa.



Predicados

- **Exemplo 2** Seja $P(x)$ o predicado unário “ $x \geq 10$ ”.
 - $P(15) = T$,
pois substituindo x por 15 em “ $x \geq 10$ ”, obtemos uma afirmação verdadeira.
 - $P(\pi) = F$,
pois substituindo x por π em “ $x \geq 10$ ”, obtemos uma afirmação falsa.
- **Exemplo 3** Seja $C(x, y)$ o predicado binário “ x é capital de y ”.
 - $C(\text{Brasília}, \text{Brasil}) = T$,
pois substituindo x por Brasília e y por Brasil em “ x é capital de y ”, obtemos uma afirmação verdadeira.
 - $C(\text{Paris}, \text{Inglaterra}) = F$,
pois substituindo x por Paris e y por Inglaterra em “ x é capital de y ”, obtemos uma afirmação falsa.

- Exemplo 4 Seja $S(x, y, z)$ o predicado ternário “ $x + y = z$ ”.
 - $S(1, 4, 5) = T$,
pois substituindo x por 1, y por 4 e z por 5 em “ $x + y = z$ ”, obtemos uma afirmação verdadeira.
 - $S(4, 5, 1) = F$,
pois substituindo x por 4, y por 5 e z por 1 em “ $x + y = z$ ”, obtemos uma afirmação falsa.
 - $S(0, 0, 0) = T$,
pois substituindo x por 0, y por 0 e z por 0 em “ $x + y = z$ ”, obtemos uma afirmação verdadeira.



Quantificadores: Introdução

- Para atribuir um valor de verdade à aplicação de um predicado podemos:
 1. atribuir valores específicos para todas variáveis (como fizemos até agora), ou
 2. *quantificar* em qual faixa de valores de x a sentença pode ser considerada verdadeira.

Em português, usamos palavras como “*nenhum*”, “*todos*” e “*algum*” para quantificar predicados.

Por exemplo, a aplicação do predicado

“O computador x do laboratório está ligado”

precisa de um valor para x para ter um valor de verdade, mas as seguintes sentenças não:

1. “Nenhum computador do laboratório está ligado.”
2. “Todos os computadores do laboratório estão ligados.”
3. “Algum computador do laboratório está ligado.”

Quantificadores: Domínio ou universo de discurso

- Dado um predicado de várias variáveis, o **domínio de discurso**, ou **universo de discurso**, ou simplesmente **domínio** é o conjunto de valores que as variáveis podem, em princípio, assumir.

- 1 No predicado

$$"x \geq 2",$$

o domínio de discurso pode ser o conjunto dos reais \mathbb{R} ou o dos inteiros \mathbb{Z} .

- 2 No predicado

"A pessoa x nasceu no país y ",

o domínio de x pode ser o conjunto de todas as pessoas, e o domínio de y pode ser o conjunto de países no mundo.

- O domínio de um predicado é essencial para determinarmos a quantificação.

Quantificador universal

- Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação universal** é

$$\forall x. P(x)$$

significando

“Para todos os valores x no domínio, $P(x)$ é verdadeiro”

ou simplesmente

“Para todo x no domínio, $P(x)$ ”

- O símbolo \forall é o símbolo de **quantificador universal**.
- A sentença $\forall x. P(x)$ é
 - verdadeira se $P(x)$ é verdadeiro para todo x no domínio,
 - falsa se há algum x no domínio tal que $P(x)$ seja falso.

Um elemento x tal que $P(x) = F$ é um **contra-exemplo** para $\forall x. P(x)$.

Quantificação universal

- Exemplo 5 Considere o universo de discurso $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A sentença

$$\forall x. x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Quantificação universal

- Exemplo 5 Considere o universo de discurso $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A sentença

$$\forall x. x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Temos que

$$1^2 \geq 1, \quad 2^2 \geq 2, \quad 3^2 \geq 3, \quad 4^2 \geq 4, \quad \text{e} \quad 5^2 \geq 5.$$

Portanto temos que $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ e $P(5)$ são todos verdadeiros, e a sentença universal é, consequentemente, também verdadeira. •

Quantificação universal

- É possível definir o universo de discurso já na sentença quantificada:
 - 1 $\forall x \in \mathbb{R}. x + 1 > x$ estabelece como universo de discurso os números reais.
 - 2 $\forall y \in \mathbb{Z}^+. -y \leq -5$ estabelece como universo de discurso os inteiros positivos.

- Exemplo 6 A sentença

$$\forall x \in \mathbb{R}. x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Quantificação universal

- É possível definir o universo de discurso já na sentença quantificada:
 - 1 $\forall x \in \mathbb{R}. x + 1 > x$ estabelece como universo de discurso os números reais.
 - 2 $\forall y \in \mathbb{Z}^+. -y \leq -5$ estabelece como universo de discurso os inteiros positivos.

- **Exemplo 6** A sentença

$$\forall x \in \mathbb{R}. x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Temos o contra-exemplo

$$(1/2)^2 = 1/4 \not\geq 1/2,$$

logo $P(1/2)$ é falso e, conseqüentemente, a sentença universal é falsa. •

Quantificação existencial

- Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação existencial** é

$$\exists x. P(x)$$

significando

“Existe um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro”

ou simplesmente

“Existe x no domínio tal que $P(x)$ ”

- O símbolo \exists é o símbolo de **quantificador existencial**.
 - A sentença $\exists x. P(x)$ é
 - verdadeira se $P(x)$ é verdadeiro para ao menos um x no domínio,
 - falsa se para todo x no domínio $P(x)$ é falso.
- Um elemento x tal que $P(x) = T$ é uma **testemunha** de $\exists x. P(x)$.

Quantificação existencial

- Exemplo 7 Seja $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ o universo de discurso. A sentença

$$\exists m. m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Quantificação existencial

- Exemplo 7 Seja $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ o universo de discurso. A sentença

$$\exists m. m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Analisando todos os casos, obtemos

$$5^2 = 25 \neq 5, \quad 6^2 = 36 \neq 6, \quad 7^2 = 49 \neq 7,$$

$$8^2 = 64 \neq 8, \quad 9^2 = 81 \neq 9, \quad e \quad 10^2 = 100 \neq 10.$$

Portanto a sentença existencial é falsa.



Quantificação existencial

- Exemplo 8 Seja \mathbb{Z} o universo de discurso. A sentença

$$\exists m. m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Quantificação existencial

- Exemplo 8 Seja \mathbb{Z} o universo de discurso. A sentença

$$\exists m. m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Temos que $1^2 = 1$, logo 1 é uma testemunha de que $m^2 = m$ para pelo menos um inteiro m .

Portanto a sentença existencial é verdadeira.

- Note que nos dois exemplos anteriores a fórmula é a mesma ($\exists m. m^2 = m$), mas com o universo de discurso $m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ela é falsa, enquanto que com o universo de discurso $m \in \mathbb{Z}$ ela é verdadeira.

Quantificação sobre domínios finitos

- Quando o domínio de um quantificador é finito, podemos remover os quantificadores universal ou existencial.
- A sentença universal em um domínio finito $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ é verdadeira sse $P(x)$ é verdadeiro para todo $x \in D$:

$$\forall x. P(x) \quad \equiv \quad P(d_1) \wedge P(d_2) \cdots \wedge P(d_n).$$

- A sentença existencial em um domínio finito $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ é verdadeira sse $P(x)$ é verdadeiro para pelo menos um $x \in D$:

$$\exists x. P(x) \quad \equiv \quad P(d_1) \vee P(d_2) \cdots \vee P(d_n).$$

Ordem de precedência dos quantificadores

- Comumente, os quantificadores \forall e \exists têm precedência sobre todos os conectivos lógicos (\neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow , ...).

Por exemplo:

- 1 A sentença

$$\forall x. P(x) \vee Q(x)$$

significa

$$(\forall x. P(x)) \vee Q(x).$$

Note que a sentença não significa

$$\forall x. (P(x) \vee Q(x)).$$

Use parênteses com cuidado para expressar o que realmente você quer!

Quantificadores: Variáveis ligadas e escopo

- Quando um quantificador é utilizado em uma variável x , dizemos que x é uma **variável ligada**.

Uma variável que não é ligada a nenhum quantificador é chamada de **variável livre**.

- Em

$$\forall x. x + y = 2,$$

x é uma variável ligada, e y é uma variável livre.

- Os nomes das variáveis ligadas de uma expressão quantificada podem ser mudados sem alterar o valor da expressão.

- A expressão

$$\exists x. x + 1 \neq x \quad \text{equivale a} \quad \exists y. y + 1 \neq y \quad \text{e a} \quad \exists num. num + 1 \neq num.$$

Quantificadores: Variáveis ligadas e escopo

- Cada quantificador tem um **escopo** sobre o qual ele vale.

1 Em

$$\exists x. (P(x) \wedge Q(x)) \quad \vee \quad \forall x. R(x)$$

todas as variáveis são ligadas, mas o escopo de cada x é diferente.

O primeiro quantificador, $\exists x$, tem como escopo apenas

$$(P(x) \wedge Q(x)).$$

O segundo quantificador, $\forall x$, tem como escopo apenas

$$R(x).$$

Podemos renomear variáveis ligadas em escopos diferentes sem alterar a expressão lógica (o que muitas vezes torna a expressão mais fácil de ser lida):

$$\exists x. (P(x) \wedge Q(x)) \quad \vee \quad \forall y. R(y)$$

- Em resumo, a diferença para darmos valor de verdade a fórmulas em lógica proposicional e lógica de predicados é:
 - Em lógica proposicional, basta uma valoração \mathcal{V} de variáveis para $\{T, F\}$ e uma maneira de avaliar uma fórmula φ qualquer de acordo com \mathcal{V} : $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{V}}$.
 - Em lógica de predicados, precisamos:
 - Definir os domínios $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ para as variáveis
 - Definir uma valoração \mathcal{V} de cada variável livre para seu respectivo domínio \mathcal{D}_i
 - Definir uma interpretação \mathcal{I} de cada predicado para seu significado
 - Avaliar uma fórmula ψ qualquer de acordo com $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n, \mathcal{V}, \mathcal{I}$. Nós chamamos esta coleção de objetos um *modelo* \mathcal{M} , e a avaliação é feita de acordo com ele: $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}}$.

$\llbracket x \rrbracket^{\mathcal{M}}$	$= \mathcal{V}(x)$
$\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket^{\mathcal{M}}$	$= \mathcal{I}(P)(\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{\mathcal{M}})$
$\llbracket \neg \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}}$	$= T$ sse $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}} = F$
$\llbracket \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rrbracket^{\mathcal{M}}$	$= T$ sse $(\llbracket \varphi_1 \rrbracket^{\mathcal{M}} = T \text{ e } \llbracket \varphi_2 \rrbracket^{\mathcal{M}} = T)$
$\llbracket \varphi_1 \vee \varphi_2 \rrbracket^{\mathcal{M}}$	$= T$ sse $(\llbracket \varphi_1 \rrbracket^{\mathcal{M}} = T \text{ ou } \llbracket \varphi_2 \rrbracket^{\mathcal{M}} = T)$
$\llbracket \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \rrbracket^{\mathcal{M}}$	$= T$ sse $(\llbracket \varphi_1 \rrbracket^{\mathcal{M}} = F \text{ ou } \llbracket \varphi_2 \rrbracket^{\mathcal{M}} = T)$
$\llbracket \forall x. \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}}$	$= T$ sse $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}_{x \mapsto d}} = T$ para todo elemento d do domínio de x .
$\llbracket \exists x. \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}}$	$= T$ sse $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}_{x \mapsto d}} = T$ para ao menos um elemento d do domínio de x .

em que $\mathcal{M}_{x \mapsto d}$ é um modelo cuja valoração \mathcal{V} é tal que $\mathcal{V}(x) = d$.

Equivalências lógicas envolvendo quantificadores

- Afirmações envolvendo predicados são logicamente equivalentes se, e somente se, elas têm o mesmo valor de verdade independentemente de quais interpretações de predicados e domínios de discurso são utilizados, i.e., se são iguais para todos os modelos possíveis.

Usamos

$$S \equiv T$$

para denotar que S e T são equivalentes.

Negando expressões quantificadas

- A negação de expressões quantificadas é dada por equivalências conhecidas como **leis de De Morgan**:

Leis de De Morgan para quantificadores

$\neg \forall x. P(x) \equiv \exists x. \neg P(x)$
--

$\neg \exists x. P(x) \equiv \forall x. \neg P(x)$
--

- Equivalências que seguem das leis de De Morgan são:

Outras equivalências de negação
--

$\forall x. P(x) \equiv \neg \exists x. \neg P(x)$
--

$\exists x. P(x) \equiv \neg \forall x. \neg P(x)$
--

Negando expressões quantificadas universalmente

- Exemplo 9

$$P : \forall x \in \mathbb{R}. x^2 \geq 0$$

$$\neg P : \neg \forall x \in \mathbb{R}. x^2 \geq 0 \equiv \exists x \in \mathbb{R}. \neg(x^2 \geq 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}. x^2 < 0$$

- Exemplo 10

P : *“Todos os programas de computador são finitos.”*

$\neg P$: *“Nem todos os programas de computador que são finitos.”* \equiv
“Existe um programa de computador que não é finito.”

- Exemplo 11

P : *“Todo mundo gosta de sorvete ou de bolo.”*

$\neg P$: *“Nem todo mundo gosta de sorvete ou de bolo.”* \equiv
“Existe uma pessoa que não gosta de sorvete nem de bolo.”

Negando expressões quantificadas existencialmente

- Exemplo 12

$$P: \exists x \in \mathbb{N}. x^2 = x$$

$$\neg P: \neg \exists x \in \mathbb{N}. x^2 = x \quad \equiv \quad \forall x \in \mathbb{N}. \neg(x^2 = x) \quad \equiv \quad \forall x \in \mathbb{N}. x^2 \neq x$$

- Exemplo 13

P : “Alguns peixes respiram ar.”

$\neg P$: “Nenhum peixe respira ar.”

- Exemplo 14

P : “Alguns esportistas são brasileiros e jovens.”

$\neg P$: “Nenhum esportista é brasileiro e jovem.” \equiv
“Todo esportista não é brasileiro ou não é jovem.”

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- Exemplo 15 Exprese como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural:
 - *“Nenhuma arara é pequena.”*
 - *“Araras são coloridas e grandes.”*
 - *“Existe uma arara que não é colorida, nem pequena.”*

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- **Exemplo 15** Exprese como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural:
 - *“Nenhuma arara é pequena.”*
 - *“Araras são coloridas e grandes.”*
 - *“Existe uma arara que não é colorida, nem pequena.”*

Solução.

Primeiro tomamos como universo de discurso o conjunto de todos os animais, então definimos os seguintes predicados (e suas interpretações):

$A(x)$: *“x é uma arara”*

$C(x)$: *“x é colorido”*

$P(x)$: *“x é pequeno”*

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- Exemplo 15 (Continuação)

Assim podemos traduzir as sentenças para linguagem formal como abaixo.

(Neste problema, supomos que tudo que não é pequeno é grande, sem meio termo.)

- “Nenhuma arara é pequena”:*

$$\neg \exists x. (A(x) \wedge P(x))$$

Forma equivalente:

$$\forall x. (A(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- Exemplo 15 (Continuação)

- “Araras são coloridas e grandes”:

$$\forall x. (A(x) \rightarrow C(x) \wedge \neg P(x))$$

- “Existe uma arara que não é colorida, nem pequena”:

$$\exists x. (A(x) \wedge \neg C(x) \wedge \neg P(x))$$

- Exemplo 16 Encontre uma forma equivalente para as duas últimas expressões quantificadas do exemplo anterior, trocando o quantificador existencial pelo universal e vice-versa. (Note que você pode usar a negação de quantificadores sempre que necessário.)

Solução. Exercício para o(a) estudante!

Quantificadores aninhados

Quantificadores aninhados: Introdução

- Muitas expressões usam múltiplos **quantificadores aninhados**.

Por exemplo, no universo de discurso dos números reais, temos o seguinte.

- 1 A expressão

$$\forall x. \forall y. ((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0))$$

significa

“O produto de quaisquer dois reais de sinais opostos é um real negativo.”

- 2 A expressão

$$\forall x. \exists y. (x + y = 0)$$

significa

“Todo número real tem um número real oposto (isto é, que somado ao original resulta em zero).”

Entendendo quantificadores aninhados

- Exemplo 17 Seja o seguinte predicado sobre o domínio de todas as pessoas:

$A(x, y)$: “A pessoa x ama a pessoa y ”

- $\forall x. \exists y. A(x, y)$ significa “Todo mundo ama alguém.”
- $\exists y. \forall x. A(x, y)$ significa “Existe alguém que é amado por todo mundo.”
- $\forall y. \exists x. A(x, y)$ significa “Todo mundo é amado por alguém.”
- $\exists x. \forall y. A(x, y)$ significa “Existe alguém que ama todo mundo.”



A ordem dos quantificadores

- Exemplo 18 Seja o universo de discurso o conjunto dos números reais. Para cada sentença, diga o que ela significa em linguagem natural e se ela é verdadeira ou falsa.
 - $\forall x. \exists y. x < y$ significa

A ordem dos quantificadores

- Exemplo 18 Seja o universo de discurso o conjunto dos números reais. Para cada sentença, diga o que ela significa em linguagem natural e se ela é verdadeira ou falsa.

- $\forall x. \exists y. x < y$ significa

“Para todo número real x , existe outro real maior que x .”

Esta sentença é verdadeira.

- $\exists y. \forall x. x < y$ significa

A ordem dos quantificadores

- **Exemplo 18** Seja o universo de discurso o conjunto dos números reais. Para cada sentença, diga o que ela significa em linguagem natural e se ela é verdadeira ou falsa.

- $\forall x. \exists y. x < y$ significa

“Para todo número real x , existe outro real maior que x .”

Esta sentença é verdadeira.

- $\exists y. \forall x. x < y$ significa

“Existe um número real que é maior que todos os demais números reais.”

Esta sentença é falsa.

As sentenças do exemplo anterior não são equivalentes logicamente.

Em geral, ao se trocar a ordem de quantificadores de tipo diferente, o sentido da sentença se altera.



Quantificação sobre duas variáveis

- Quantificadores podem ser aninhados em vários níveis.

Em particular, é comum encontrar quantificadores aninhados em dois níveis.

Afirmação	Quando é verdadeira?	Quando é falsa?
$\forall x. \forall y. P(x, y)$ $\forall y. \forall x. P(x, y)$	$P(x, y)$ é verdadeiro para todo par x, y .	Existe um par x, y tal que $P(x, y)$ é falso.
$\forall x. \exists y. P(x, y)$	Para todo x existe um y tal que $P(x, y)$ é verdadeiro.	Existe um x tal que $P(x, y)$ é falso para todo y .
$\exists x. \forall y. P(x, y)$	Existe um x tal que $P(x, y)$ é verdadeiro para todo y .	Para todo x existe um y tal que $P(x, y)$ é falso.
$\exists x. \exists y. P(x, y)$ $\exists y. \exists x. P(x, y)$	Exite um par x, y tal que $P(x, y)$ é verdadeiro.	$P(x, y)$ é falso para todo par x, y .

De sentenças quantificadas para linguagem natural

- Exemplo 19 Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$C(x)$: “ x tem um computador”

$F(x, y)$: “ x e y são amigos”

- $\forall x. (C(x) \vee \exists y. (C(y) \wedge F(x, y)))$ significa

“Todo estudante tem um computador, ou tem um amigo que tenha um computador.”

- $\exists x. \forall y. \forall z. (F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z) \rightarrow \neg F(y, z))$ significa

“Existe um estudante cujos amigos não são amigos entre si.”



De linguagem natural para sentenças lógicas

- Exemplo 20 Exprese como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural, considerando que estamos falando apenas de estudantes da universidade:
 - *“Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir.”*
 - *“Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba.”*
 - *“Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir.”*

De linguagem natural para sentenças lógicas

- **Exemplo 20** Exprese como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural, considerando que estamos falando apenas de estudantes da universidade:
 - *“Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir.”*
 - *“Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba.”*
 - *“Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir.”*

Solução.

Primeiro definimos os seguintes predicados sobre o universo de todos os estudantes da universidade:

$D(x)$: “ x sabe dirigir”

$A(x, y)$: “ x e y são amigos”

Assim podemos traduzir as sentenças para linguagem formal como a seguir.

De linguagem natural para sentenças lógicas

- Exemplo 20 (Continuação)

1 “Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir”:

$$\forall x. \exists y. (A(x, y) \wedge \neg D(y))$$

2 “Há um estudante que não sabe dirigir e não tem nenhum amigo que saiba”:

$$\exists x. (\neg D(x) \wedge \forall y. (A(x, y) \rightarrow \neg D(y)))$$

3 “Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir”:

$$\forall x. \exists y. (A(x, y) \wedge \neg D(y) \wedge \forall z. (A(x, z) \wedge \neg D(z) \rightarrow y = z))$$

ou, de forma equivalente:

$$\forall x. \exists y. (A(x, y) \wedge \neg D(y) \wedge \forall z. (A(x, z) \wedge y \neq z \rightarrow D(z)))$$



Negação de quantificadores aninhados

- A negação de quantificadores aninhados usa as mesmas leis de De Morgan para negação de quantificadores.

Leis de De Morgan para negação
$\neg \forall x. P(x) \equiv \exists x. \neg P(x)$
$\neg \exists x. P(x) \equiv \forall x. \neg P(x)$

Notando que $P(x)$ pode ser ela mesma uma expressão quantificada.

- Exemplo 21** Seja $A(x, y)$ a sentença “A pessoa x ama a pessoa y ” com universo de discurso como sendo todas as pessoas do mundo.

$P : \forall x. \exists y. A(x, y)$ “Todo mundo ama alguém”

$\neg P : \neg \forall x. \exists y. A(x, y) \equiv$
 $\exists x. \neg \exists y. A(x, y) \equiv$
 $\exists x. \forall y. \neg A(x, y)$ “Existe alguém que não ama ninguém.”



Negação de quantificadores aninhados

- Exemplo 22 Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$D(x)$: “ x sabe dirigir”

$A(x, y)$: “ x e y são amigos”

Sentença P:

P : $\forall x. \exists y. (A(x, y) \wedge \neg D(y))$

Afirmativa: “*Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir.*”

$\neg P$: $\exists x. \forall y. (A(x, y) \rightarrow D(y))$

Negação: “*Existe um estudante cujos amigos todos sabem dirigir.*”

Negação de quantificadores aninhados

- Exemplo 22 (Continuação)

Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$D(x)$: “ x sabe dirigir”

$A(x, y)$: “ x e y são amigos”

Sentença Q:

Q : $\exists x. (\neg D(x) \wedge \forall y. (A(x, y) \rightarrow \neg D(y)))$

Afirmativa: “*Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem
nenhum amigo que saiba.*”

$\neg Q$: $\forall x. (D(x) \vee \exists y. (A(x, y) \wedge D(y)))$

Negação: “*Todo estudante sabe dirigir, ou tem um amigo que sabe.*”

Negação de quantificadores aninhados

- Exemplo 22 (Continuação)

Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$D(x)$: “ x sabe dirigir”

$A(x, y)$: “ x e y são amigos”

Sentença R:

R : $\forall x. \exists y. (A(x, y) \wedge \neg D(y) \wedge \forall z. (A(x, z) \wedge \neg D(z) \rightarrow y = z))$

Afirmativa: “Cada estudante tem exatamente um amigo que”
“não sabe dirigir.”

\neg R : $\exists x. \forall y. (A(x, y) \rightarrow (D(y) \vee \exists z. (A(x, z) \wedge \neg D(z) \wedge y \neq z)))$

Negação: “Existe um estudante que não possui amigos que não dirijam”
“ou que possui ao menos dois amigos que não dirijam.”

Outros tipos de quantificadores

- Até agora introduzimos os quantificadores existencial e universal.
Estes quantificadores são os mais importantes em matemática e em computação.
- Nada impede, entretanto, que se definam outros quantificadores, como:
 - ① “Existem pelo menos 3”
 - ② “Existem no máximo 100”
 - ③ “Existe exatamente 1”
 - ④ “Existem exatamente 35”

Neste curso, entretanto, vamos nos ater apenas aos quantificadores existencial e universal, por duas boas razões:

- ① os demais podem ser representados usando apenas os quantificadores existencial e universal; e
- ② as regras de inferência que veremos mais adiante no curso são muito mais simples se usarmos apenas estes quantificadores.

A seguir veremos alguns exemplos de como esses novos quantificadores podem ser escritos em função apenas do existencial e do universal.

Outros tipos de quantificadores

- Exemplo 23 Dado um predicado $P(x)$, vamos definir o conceito de **quantificação de no máximo 1**

$$\exists_{\leq 1} x. P(x)$$

significando

“Existe no máximo um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro”,

que é verdadeira se zero ou exatamente um valor de x no domínio torna $P(x)$ verdadeira, e é falsa se dois ou mais valores de x no domínio tornam $P(x)$ verdadeira.

Mostre que o quantificador $\exists_{\leq 1}$ pode ser escrito usando apenas os quantificadores existencial \exists e universal \forall .

Outros tipos de quantificadores

- Exemplo 23 (Continuação)

Solução.

Note que falar que existe no máximo um valor de x que satisfaz $P(x)$ significa dizer que se há dois valores x_1 e x_2 que satisfazem $P(x)$, então x_1 e x_2 são iguais:

$$\exists_{\leq 1} x. P(x) \equiv \forall x_1. \forall x_2. (P(x_1) \wedge P(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$$

Alternativamente, podemos tomar a contrapositiva e dizer que se x_1 e x_2 são diferentes, então não podemos ter $P(x_1)$ e $P(x_2)$ verdadeiros ao mesmo tempo:

$$\exists_{\leq 1} x. P(x) \equiv \forall x_1. \forall x_2. (x_1 \neq x_2 \rightarrow \neg P(x_1) \vee \neg P(x_2))$$



Outros tipos de quantificadores: unicidade

- Exemplo 24 Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação de unicidade** é

$$\exists!x. P(x)$$

significando

“Existe exatamente um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro”,

que é verdadeira se exatamente um valor de x no domínio torna $P(x)$ verdadeira, e é falsa se zero ou mais de um valor de x no domínio tornam $P(x)$ verdadeira.

Mostre que o quantificador $\exists!$ pode ser escrito usando apenas os quantificadores existencial \exists e universal \forall .

Solução. Desafio para o(a) estudante!

(Relembrando: nas listas nas provas é esperado que você use apenas os quantificadores existencial e universal!)

Proposições condicionais universais

Sentença condicional universal

- Uma **sentença condicional universal** tem a forma

$$\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x))$$

- Proposições desta forma são muito comuns.

- 1 “Se um número real é maior que 2 então seu quadrado é maior que 4”:

$$\forall x \in \mathbb{R}. ((x > 2) \rightarrow (x^2 > 4))$$

- 2 “Todo byte tem oito bits”:

$$\forall x. \text{ “se } x \text{ é um byte, então } x \text{ tem oito bits”}.$$

- Lembre-se de que as duas proposições seguintes são equivalentes:

$$\forall x. (x \in D \rightarrow P(x)) \equiv \forall x \in D. P(x)$$

No geral prefere-se a segunda forma.

Negação de proposições condicionais universais

- A negação de uma sentença condicional universal é derivada como:

$$\begin{aligned}\neg \forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)) &\equiv \exists x. \neg(P(x) \rightarrow Q(x)) && \text{(por De Morgan)} \\ &\equiv \exists x. \neg(\neg P(x) \vee Q(x)) && \text{(por equiv. de impl.)} \\ &\equiv \exists x. (P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{(por De Morgan)}\end{aligned}$$

- Exemplo 25

P : “*Toda pessoa loira tem olhos azuis.*”

$\neg P$: “*Existe uma pessoa loira que não tem olhos azuis.*”

- Exemplo 26

P : “*Se um programa foi escrito em C, ele tem um erro.*”

$\neg P$: “*Existe pelo menos um programa escrito em C que não tenha erro.*”

Verdade por vacuidade de proposições universais

- Lembre-se de que se a premissa p é falsa, a implicação

$$p \rightarrow q$$

é sempre verdadeira, independente de q .

- Portanto, se $P(x)$ é falso para cada x no universo de discurso D , então uma sentença da forma

$$\forall x \in D. (P(x) \rightarrow Q(x))$$

é verdadeira, já que a implicação $P(x) \rightarrow Q(x)$ é verdadeira para todo x .

Verdade por vacuidade de proposições universais

- Exemplo 27 Sejam cinco bolas azuis, cinco brancas e um prato.

- **Cenário 1:** três bolas azuis e uma branca são colocadas no prato.

A afirmação

“Todas as bolas no prato são azuis”

é verdadeira ou falsa?

Para ver que a afirmação é falsa, note que sua negativa é verdadeira:

“Existe pelo menos uma bola no prato que não é azul.”

Verdade por vacuidade de proposições universais

- Exemplo 27 (Continuação)

Sejam cinco bolas azuis, cinco brancas e um prato.

- Cenário 2:** nenhuma bola é colocada no prato.

A afirmação

“Todas as bolas no prato são azuis”

é verdadeira ou falsa?

Para ver que a afirmação é verdadeira, note que sua negativa é falsa:

“Existe pelo menos uma bola no prato que não é azul.”

Uma outra maneira para ver que a afirmação é verdadeira é escrevê-la explicitamente como uma sentença universal em que a hipótese da implicação é sempre falsa (e, portanto, a implicação é sempre verdadeira):

“Para toda bola, temos que se ela está no prato, então ela é azul.”

