

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2024.1

Lógica Proposicional: Aplicações, Equivalências

Área de Teoria DCC/UFMG

Aplicações da Lógica Proposicional

Aplicações da lógica proposicional: Introdução

- A lógica tem importantes aplicações na matemática, ciência da computação, e diversas outras disciplinas:
 - ➊ tradução de sentenças em linguagem natural, frequentemente ambíguas, para uma linguagem precisa,
 - ➋ especificação de circuitos lógicos,
 - ➌ solução de quebra-cabeças (o que é essencial para inteligência artificial),
 - ➍ automatização do processo de construção de demonstrações matemáticas,
 - ➎ ...
- Nesta seção vamos exemplificar algumas destas aplicações práticas da lógica proposicional.

Traduzindo sentenças em linguagem natural

- Sentenças em linguagem natural são frequentemente ambíguas, o que pode causar problemas de comunicação.
- Traduzir sentenças em linguagem natural para proposições compostas remove a ambiguidade.
- Uma vez traduzidas para proposições lógicas, estas sentenças podem ser analisadas quanto ao seu valor de verdade.

Traduzindo sentenças em linguagem natural

- Exemplo 1 Seja a sentença em linguagem natural:

“Você não pode andar na montanha russa se você tiver menos que 1,50m de altura, a menos que você tenha mais de 16 anos.”

Podemos traduzí-la para uma proposição composta, usamos as seguintes proposições:

- q : “*você pode andar na montanha russa*”,
- r : “*você tem menos que 1,50m de altura*”,
- s : “*você tem mais de 16 anos*”.

A sentença em linguagem natural é, então, traduzida para:

$$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q.$$

(Note que esta não é a única maneira de representar esta sentença.)



Especificação de sistemas

- Traduzir sentenças de linguagem natural para linguagem lógica é parte essencial da especificação de sistemas de hardware e software.

Exemplo 2 Exprese a especificação abaixo como uma proposição composta.

“A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema de arquivos está cheio.”

Especificação de sistemas

- Traduzir sentenças de linguagem natural para linguagem lógica é parte essencial da especificação de sistemas de hardware e software.

Exemplo 2 Expresse a especificação abaixo como uma proposição composta.

“A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema de arquivos está cheio.”

Solução. Podemos traduzir a especificação para uma proposição composta, usando as seguintes proposições:

- r : *“a resposta automática pode ser enviada”*,
- c : *“o sistema de arquivos está cheio”*.

Especificação de sistemas

- Traduzir sentenças de linguagem natural para linguagem lógica é parte essencial da especificação de sistemas de hardware e software.

Exemplo 2 Expresse a especificação abaixo como uma proposição composta.

“A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema de arquivos está cheio.”

Solução. Podemos traduzir a especificação para uma proposição composta, usando as seguintes proposições:

- r : *“a resposta automática pode ser enviada”*,
- c : *“o sistema de arquivos está cheio”*.

A especificação fica, então, traduzida para:

$$c \rightarrow \neg r.$$

Especificação de sistemas

- Especificações de sistemas devem ser **consistentes**.
 - Não devem conter requisitos conflitantes.
 - Senão, seria possível derivar uma contradição.

Quando as especificações não são consistentes, não é possível desenvolver um sistema que satisfaça todos os requisitos.

- **Exemplo 3** Determine se a seguinte especificação de sistema é consistente:
 - *“A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer ou é retransmitida.”*
 - *“A mensagem de diagnóstico não está armazenada no buffer.”*
 - *“Se a mensagem de diagnóstico estiver armazenada no buffer, ela será retransmitida.”*

Especificação de sistemas

- Especificações de sistemas devem ser **consistentes**.
 - Não devem conter requisitos conflitantes.
 - Senão, seria possível derivar uma contradição.

Quando as especificações não são consistentes, não é possível desenvolver um sistema que satisfaça todos os requisitos.

- **Exemplo 3** Determine se a seguinte especificação de sistema é consistente:
 - *“A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer ou é retransmitida.”*
 - *“A mensagem de diagnóstico não está armazenada no buffer.”*
 - *“Se a mensagem de diagnóstico estiver armazenada no buffer, ela será retransmitida.”*

Solução. Para determinar se essas especificações são consistentes, primeiro vamos representar seus componentes como expressões lógicas:

- p : *“A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer.”*
- q : *“A mensagem de diagnóstico é retransmitida.”*

Especificação de sistemas

- Exemplo 3 (Continuação)

Assim, a especificação do sistema pode ser reescrita como:

- $p \vee q$

- $\neg p$

- $p \rightarrow q$

Podemos verificar se especificação é consistente com uma tabela da verdade que mostra se é possível satisfazer todos os três requisitos ao mesmo tempo.

Especificação de sistemas

- Exemplo 3 (Continuação)

Assim, a especificação do sistema pode ser reescrita como:

- $p \vee q$

- $\neg p$

- $p \rightarrow q$

Podemos verificar se especificação é consistente com uma tabela da verdade que mostra se é possível satisfazer todos os três requisitos ao mesmo tempo.

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	F
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

Note que a especificação do sistema é consistente, e ela é satisfeita quando $p = F$ e $q = T$.



Especificação de sistemas

- Exemplo 4 Suponha que adicionemos à especificação do exemplo anterior o seguinte requisito:
 - *“A mensagem de diagnóstico não é retransmitida.”*

Neste caso a especificação do sistema continua consistente?

Especificação de sistemas

- Exemplo 4 Suponha que adicionemos à especificação do exemplo anterior o seguinte requisito:

- “A mensagem de diagnóstico não é retransmitida.”

Neste caso a especificação do sistema continua consistente?

Solução. O novo requisito pode ser representado logicamente como $\neg q$, e a tabela da verdade atualizada é a seguinte.

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg q$
T	T	T	F	T	F
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T

Pode-se notar que agora é impossível satisfazer todos os requisitos ao mesmo tempo e, portanto, a especificação do sistema é inconsistente.



Resolução de problemas e quebra-cabeças

- **Exemplo 5** Considere uma ilha em que há apenas dois tipos de habitantes: cavaleiros, que só falam a verdade, e cavilosos, que só falam mentiras.

Você encontra duas pessoas, A e B .

A pessoa A diz:

“ B só diz a verdade”,

enquanto a pessoa B diz:

“ A e eu somos pessoas de tipos diferentes”.

Qual o tipo de A e o tipo de B ?

Solução.

Dever de casa.



Equivalências Proposicionais

Equivalência de proposições: Introdução

- Um passo importante na resolução de muitos problemas é a substituição de uma afirmação por outra com mesmo valor de verdade.
- Como determinar se duas fórmulas tem sempre o mesmo valor de verdade?
- Duas fórmulas são equivalentes quando elas têm o mesmo valor para qualquer atribuição de suas variáveis.
 - Ou seja, para quaisquer valores que as proposições atômicas possam tomar.

Equivalência de proposições: Introdução

- Primeiro, vamos categorizar os tipos de fórmulas:
 - uma **tautologia** é uma expressão sempre verdadeira independentemente o valor de verdade das variáveis que nela aparecem;
 - uma **contradição** é uma expressão sempre falsa independentemente o valor de verdade das variáveis que nela aparecem;
 - uma **contingência** é uma expressão que não é nem uma tautologia, nem uma contradição.
- **Exemplo 6** A tabela da verdade abaixo mostra que $(p \wedge \neg p)$ é uma contradição, enquanto a expressão $(p \vee \neg p)$ é uma tautologia.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	F	T
F	T	F	T



Equivalências lógicas

- Duas fórmulas φ e ψ são **logicamente equivalentes** se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

A notação $\varphi \equiv \psi$ denota que φ e ψ são logicamente equivalentes.

- Uma maneira de determinar se $\varphi \equiv \psi$ é usando tabelas da verdade.

- Exemplo 7 Mostre que $p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

Tabela da verdade para $p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Como a coluna correspondente a $p \rightarrow q$ e a coluna correspondente a $\neg p \vee q$ possuem sempre o mesmo valor de verdade, $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia.

Logo $p \rightarrow q \equiv (\neg p \vee q)$.



Equivalências lógicas

- Exemplo 8 Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução. Tabela da verdade para $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Uma vez que a coluna correspondente a $\neg(p \vee q)$ e a coluna correspondente a $\neg p \wedge \neg q$ possuem sempre o mesmo valor de verdade, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ é uma tautologia.

Logo, $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

A equivalência que demonstramos é uma das **Leis de De Morgan**:

Leis de De Morgan

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Equivalências lógicas

- Exemplo 9 Mostre que $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são logicamente equivalentes.

Solução. Tabela da verdade para $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Como as colunas correspondentes a $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ possuem sempre o mesmo valor de verdade, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. •

A equivalência que demonstramos é a **lei da distributividade da disjunção sobre a conjunção**.

Equivalências lógicas

- Algumas equivalências lógicas importantes:

Nome	Equivalência
Leis de identidade	$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$
Leis de dominância	$p \wedge F \equiv F$ $p \vee T \equiv T$
Leis de idempotência	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
Lei da dupla negação	$\neg(\neg p) \equiv p$
Leis de comutatividade	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
Leis de associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
Leis de distributividade	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Leis de De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Leis de absorção	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Leis da negação	$p \wedge \neg p \equiv F$ $p \vee \neg p \equiv T$

Equivalências lógicas

- Equivalências lógicas envolvendo proposições condicionais:

Equivalências
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

- Equivalências lógicas envolvendo proposições bicondicionais:

Equivalências
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Usos das Leis de De Morgan

- A lei

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

diz que a negação da disjunção é a conjunção das negações.

- Exemplo 10 Use as Leis de De Morgan para negar a proposição:

“Danilo vai assistir a Star Wars ou vai assistir a O Senhor dos Anéis.”

Usos das Leis de De Morgan

- A lei

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

diz que a negação da disjunção é a conjunção das negações.

- Exemplo 10 Use as Leis de De Morgan para negar a proposição:

“Danilo vai assistir a Star Wars ou vai assistir a O Senhor dos Anéis.”

Solução. Esta proposição pode ser escrita como $p \vee q$, onde p é *“Danilo vai assistir a Star Wars”*, e q é *“Danilo vai assistir a O Senhor dos Anéis”*.

Pela lei de De Morgan, a negação é $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, que se traduz em

“Danilo não vai assistir a Star Wars e nem vai assistir a O Senhor dos Anéis.”



Usos das Leis de De Morgan

- A lei de De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

diz que a negação da conjunção é a disjunção das negações.

- Exemplo 11 Use as Leis de De Morgan para negar a proposição:

“Estela tem um celular e um computador.”

Solução. Esta proposição pode ser escrita como $p \wedge q$, onde p é “Estela tem um celular”, e q é “Estela tem um computador”.

Pelas Leis de De Morgan, a negação é $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, que se traduz em

“Estela não tem um celular ou ela não tem um computador.”



Construindo novas equivalências lógicas

- A tabela de verdade de uma fórmula com n variáveis tem 2^n linhas.
- Para n grande, é ineficiente construir a tabela da verdade. Por exemplo:
 - ① Quanto $n = 3$, temos $2^n = 8$
 - ② Quando $n = 10$, temos $2^n = 1024$
- Uma alternativa é utilizar equivalências lógicas já conhecidas para derivar novas equivalências lógicas.

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 12 Mostre que $\neg(p \rightarrow q)$ e $p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv$$

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 12 Mostre que $\neg(p \rightarrow q)$ e $p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \quad (\text{pela tabela de equiv. de condicionais})$$

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 12 Mostre que $\neg(p \rightarrow q)$ e $p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\begin{aligned}\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && \text{(pela tabela de equiv. de condicionais)} \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \text{(pelas Leis de De Morgan)}\end{aligned}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 12 Mostre que $\neg(p \rightarrow q)$ e $p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\begin{aligned}\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && \text{(pela tabela de equiv. de condicionais)} \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv p \wedge \neg q && \text{(pela lei da dupla negação)}\end{aligned}$$

Note a intuição por trás dessa equivalência: dizer que uma implicação é falsa ($\neg(p \rightarrow q)$) é o mesmo que dizer que sua hipótese é verdadeira mas sua conclusão é falsa ($p \wedge \neg q$).



Construindo novas equivalências lógicas

- **Exemplo 13** Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv$$

Construindo novas equivalências lógicas

- **Exemplo 13** Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \quad (\text{pelas Leis de De Morgan})$$

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 13 Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)}\end{aligned}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 13 Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(pela lei da dupla negação)}\end{aligned}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 13 Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(pela lei da dupla negação)} \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(pela lei da distributividade)}\end{aligned}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 13 Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(pela lei da dupla negação)} \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(pela lei da distributividade)} \\ &\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(porque } \neg p \wedge p \equiv F \text{)}\end{aligned}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 13 Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(pela lei da dupla negação)} \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(pela lei da distributividade)} \\ &\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(porque } \neg p \wedge p \equiv F \text{)} \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F && \text{(pela lei da comutatividade)}\end{aligned}$$

Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 13 Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Solução.

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{(pelas Leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(pela lei da dupla negação)} \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(pela lei da distributividade)} \\ &\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(porque } \neg p \wedge p \equiv F \text{)} \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F && \text{(pela lei da comutatividade)} \\ &\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{(pela lei de identidade)}\end{aligned}$$



Construindo novas equivalências lógicas

- Exemplo 14 Mostre que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia.

Solução.

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{(equivalência de condicionais)} \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) && \text{(pela Leis de De Morgan)} \\ &\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) && \text{(comutatividade e associatividade)} \\ &\equiv T \vee T && \text{(pela lei de negação)} \\ &\equiv T && \text{(pela lei de dominância)}\end{aligned}$$

